Enoncés : M. Quéffelec, V. Mayer
Corrections : A. Bodin

Continuité

Applications continues

Exercice 1

Soit X un espace topologique et $f : X \to \mathbb{R}$.

1. Montrer que f est continue si et seulement si pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, les ensembles $\{x\ ;\ f(x) < \lambda\}$ et $\{x\ ;\ f(x) > \lambda\}$ sont des ouverts de X.
2. Montrer que si f est continue, pour tout ω ouvert de $\mathbb{R}$, $f^{-1}(\omega)$ est un F_σ ouvert de X (F_σ= réunion dénombrable de fermés).

Indication ▼ Correction ▼ [002353]

Exercice 2

1. Soit C l'espace des fonctions continues réelles sur $[0,1]$ muni de la métrique $d_1(f,g) = \int_0^1 |f-g|\ dx$, puis de la métrique $d_\infty(f,g) = \sup_x |f(x)-g(x)|$. Vérifier que l'application $f \to \int_0^1 |f| dx$ de C dans $\mathbb{R}$ est 1-lipschitzienne dans les deux cas.
2. Soit c l'espace des suites réelles convergentes, muni de la métrique $d(x,y) = \sup_n |x(n)-y(n)|$. Si on désigne par $\ell(x)$ la limite de la suite x, montrer que ℓ est une application continue de c dans $\mathbb{R}$. En déduire que c_0 est fermé dans c.

Indication ▼ Correction ▼ [002354]

Exercice 3

Soit f,g deux applications continues de X dans Y, espaces topologiques, Y étant séparé. Montrer que $\{f = g\}$ est fermé dans X ; en déduire que si f et g coïncident sur une partie dense de X, alors $f = g$.

Indication ▼ Correction ▼ [002355]

Exercice 4

Une application de X dans Y est dite *ouverte* si l'image de tout ouvert de X est un ouvert de Y ; *fermée* si l'image de tout fermé de X est un fermé de Y.

1. Montrer qu'une fonction polynomiale de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est une application fermée.
2. Montrer que l'application $(x,y) \in X \times Y \to x \in X$ est ouverte mais pas nécessairement fermée (considérer l'hyperbole équilatère de $\mathbb{R}^2$).
3. Montrer que la fonction indicatrice de l'intervalle $[0, \frac{1}{2}]$, comme application de $\mathbb{R}$ dans $\{0,1\}$, est surjective, ouverte, fermée, mais pas continue.
4. Montrer que toute application ouverte de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est monotone.

Indication ▼ Correction ▼ [002356]

Exercice 5

1. Montrer que f est continue si et seulement si $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$ pour tout A dans X. Que peut-on dire alors de l'image par f d'un ensemble dense dans X ?
2. Montrer que f est fermée si et seulement si $\overline{f(A)} \subset f(\overline{A})$, et que f est ouverte si et seulement si $f(\overset{\circ}{A}) \subset \overset{\circ}{\overbrace{f(A)}}$.

Indication ▼ Correction ▼ [002357]

Applications uniformément continues

Exercice 6

1. Soit f une fonction réelle continue sur $[0,1]$; montrer que f est "presque lipschitzienne" au sens : $\forall \varepsilon > 0\ \exists C_\varepsilon\ ;\ \forall x,y \in [0,1] \quad |f(x)-f(y)| \leqslant C_\varepsilon |x-y| + \varepsilon$.
2. Montrer qu'une fonction f uniformément continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ vérifie pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|f(x)| \leqslant a|x| + b$ où a et b sont des constantes.

[002358]

Exercice 7

Soit f une fonction continue de $]0,1[$ dans $\mathbb{R}$. Montrer que, si f est uniformément continue, elle est bornée. Réciproque ? [002359]

Exercice 8

Soit f une fonction uniformément continue sur $\mathbb{R}$ telle que $\int_0^\infty f(t)dt$ converge. Montrer que f tend vers 0 quand $x \to +\infty$. Retrouver ainsi le fait que la fonction $\sin(x^2)$ n'est pas uniformément continue.

Indication ▼ Correction ▼ [002360]

Applications linéaires bornées

Exercice 9

Soient E_1, E_2 et F des espaces normés sur $\mathbb{R}$ et soit $B : E_1 \times E_2 \to F$ une application bilinéaire. Montrer que B est continue si et seulement s'il existe $M > 0$ tel que

$$\|B(x)\| \leqslant M\|x_1\|\|x_2\| \quad \text{pour tout } x = (x_1,x_2) \in E_1 \times E_2 \,.$$

Indication ▼ Correction ▼ [002361]

Exercice 10

Soient E et F deux espaces normés et $L : E \to F$ une application linéaire vérifiant : $(L(x_n))_n$ *est bornée dans* F *pour toute suite* $(x_n)_n$ *de* E *tendant vers* $0 \in E$. Montrer que L est continue.

Indication ▼ Correction ▼ [002362]

Exercice 11

Soient E et F deux espaces normés réels et $f : E \to F$ une application bornée sur la boule unité de E et vérifiant

$$f(x+y) = f(x) + f(y) \quad \text{pour tout } x,y \in E \,.$$

Montrer que f est linéaire continue.

Indication ▼ Correction ▼ [002363]

Exercice 12

Calculer la norme des opérateurs suivants :

— Le shift sur l^∞ défini par $S(x)_{n+1} = x_n$, $S(x)_0 = 0$.

— $X = \mathscr{C}([0,1])$ muni de la norme $\|.\|_\infty$ et $Tf(x) = f(x)g(x)$ où $g \in X$.

Calculer la norme des formes linéaires suivantes :

— $X = \mathscr{C}([0,1])$ muni de la norme $\|.\|_\infty$ et $u(f) = \int_0^1 f(x)g(x)\,dx$ où $g \in X$ est une fonction qui ne s'annule qu'en $x = 1/2$.

— $X = l^2$ et $u(x) = \sum a_n x_n$ où (a_n) est dans X.

— $X = l^1$ et $u(x) = \sum a_n x_n$ où (a_n) est dans l^∞.

— X l'espace des suites convergentes muni de la norme sup et $u : X \to \mathbb{R}$ l'application $u(x) = \lim_{j\to\infty} x_j$.

Indication ▼ Correction ▼ [002364]

Exercice 13

Soit $X = \mathbb{R}[x]$ l'ensemble des polynômes. Pour $P(x) = \sum_{k=0}^{p} a_k x^k$ on pose $\|P\| = \sup_k |a_k|$, $U(P)(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} a_k x^k$ et $V(P)(x) = \sum_{k=1}^{n} k a_k x^k$.

1. Montrer que $\|.\|$ définit une norme et que U et V définissent des applications linéaires de X dans X.
2. Examiner si U et V sont continues ?

Indication ▼ Correction ▼ [002365]

Exercice 14

Soit l^∞ l'espace des suites réelles muni avec la norme uniforme, i.e. $\|x\|_\infty = \sup_n |x_n|$. On considére l'application $A : l^\infty \to l^\infty$ définie par

$$A(x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots) = (x_1, x_2/2, \ldots, x_n/n, \ldots)\ .$$

Montrer que :

1. A est injective et continue avec $\|A\| = 1$. Par contre, A n'est pas surjective.
2. A admet un inverse à gauche mais qu'il n'est pas continu.

Correction ▼ [002366]

Exercice 15

Soit X un espace normé, $L : X \to \mathbb{R}$ une forme linéaire non nulle et $H = L^{-1}(\{0\})$ son noyau.

1. Montrer que, si L est continue, alors H est un sous-espace fermé dans X. Établir la relation
$$\mathrm{dist}(a, H) = \frac{|L(a)|}{\|L\|} \quad \text{pour tout } a \in X\ .$$
2. Réciproquement, supposons que le noyau H est un fermé. Démontrer alors que $\mathrm{dist}(a, H) > 0$ dès que $a \in X \setminus H$ et en déduire que L est continue de norme au plus $|L(a)|/\mathrm{dist}(a, H)$.
3. Peut-on généraliser ceci a des applications linéaires entre espaces normés ?

Indication ▼ Correction ▼ [002367]

Exercice 16

Soit $X = \mathscr{C}([0,1])$ avec la norme $\|f\| = \int_0^1 |f(t)|\,dt$. Montrer que la forme linéaire $f \in X \mapsto f(0) \in \mathbb{R}$ n'est pas continue. Que peut-on en déduire pour le sous-espace des fonctions de X nulles en 0 ?

Correction ▼ [002368]

Exercice 17

Soit $X = \{f \in \mathscr{C}(\mathbb{R})\ ;\ (1+x^2)|f(x)| \text{ soit bornée}\}$. On pose $N(f) = \sup_{x\in\mathbb{R}}(1+x^2)|f(x)|$. Vérifier que N est une norme, puis montrer que la forme linéaire suivante L est continue et calculer sa norme :

$$L : X \to \mathbb{R} \quad \text{définie par} \quad L(f) = \int_{\mathbb{R}} f(x)\, dx\,.$$

Indication ▼ Correction ▼ [002369]

Indication pour l'exercice 1 ▲

1. Utiliser le fait que tout ouvert de $\mathbb{R}$ est l'union dénombrable d'intervalles ouverts.
2. Écrire un intervalle fermé comme union dénombrable d'intervalles ouverts, puis utiliser la même remarque que ci-dessus.

Indication pour l'exercice 2 ▲

1. ....
2. Pour montrer que c_0 est fermé, l'écrire comme image réciproque de quelque chose.

Indication pour l'exercice 3 ▲

Montrer que le complémentaire est un ouvert. Si vous le souhaitez, placez-vous dans des espaces métriques.

Indication pour l'exercice 4 ▲

1. Pour un polynôme P, la limite de $P(x)$ ne vaut $\pm\infty$ que lorsque x tend vers $\pm\infty$.

Indication pour l'exercice 5 ▲

1. Pour le sens direct utiliser la caractérisation de l'adhérence par les suites. Pour le sens réciproque, montrer que l'image réciproque d'un fermé est un fermé.

Indication pour l'exercice 8 ▲

1. Par l'absurde, considérer $I(x) = \int_0^x f$. Trouver une suite (p_n) telle que $(I(p_n))$ ne soit pas une suite de Cauchy.
2. Pour montrer que cette intégrale converge utiliser le changement de variable $u = t^2$ puis faire une intégration par partie.

Indication pour l'exercice 9 ▲

Si la relation est vérifiée montrer que B est continue en x en calculant $B(x+y) - B(x)$. Si B est continue alors en particulier B est continue en $(0,0)$, fixer le ε de cette continuité,...

Indication pour l'exercice 10 ▲

La continuité de L sur E équivaut la continuité en 0. Par l'absurde supposer que L n'est pas continue en 0 et construire une suite (x_n) qui tend vers 0 mais avec $(L(x_n))$ non bornée.

Indication pour l'exercice 11 ▲

Il faut montrer $f(\lambda x) = \lambda f(x)$ pour $\lambda \in \mathbb{R}$. Le faire pour $\lambda \in \mathbb{N}$, puis $\lambda \in \mathbb{Z}$, puis $\lambda \in \mathbb{Q}$ et enfin $\lambda \in \mathbb{R}$.

Indication pour l'exercice 12 ▲

1. $\|S\| = 1$;
2. $\|T\| = \|g\|_\infty$;
3. $\|u\| = \int_0^1 |g|$, on distinguera les cas où g reste de signe constant et g change de signe ;
4. $\|u\| = \|a_n\|_2$;

5. $\|u\| = \|a\|_\infty$;
6. $\|u\| = 1$.

Indication pour l'exercice 13 ▲

U est continue et $\|U\| = 1$, V n'est pas continue.

Indication pour l'exercice 15 ▲

1. Montrer d'abord que X se décompose sous la forme $H + \mathbb{R}.a$.
2. ...
3. Non ! Chercher un contre-exemple dans les exercices précédents.

Indication pour l'exercice 17 ▲

Montrer que $\|L\| = \pi$.

Correction de l'exercice 1 ▲

1. Sens direct. Si f est continue alors $\{x \mid f(x) < \lambda\} = f^{-1}(]-\infty,\lambda[)$ est un ouvert comme image réciproque par une application continue de l'intervalle ouvert $]-\infty,\lambda[$. De même avec $]\lambda,+\infty[$.
Réciproque. Tout d'abord, tout intervalle ouvert $]a,b[$, $(a<b)$ peut s'écrire
$$]a,b[=]-\infty,b[\cap]a,+\infty[.$$
Donc
$$f^{-1}(]a,b[) = f^{-1}(]-\infty,b[) \cap f^{-1}(]a,+\infty[)$$
est une intersection de deux ouverts donc un ouvert de X. Soit O un ouvert de $\mathbb{R}$, alors O peut s'écrire comme l'union dénombrables d'intervalles ouverts :
$$O = \bigcup_{i\in I}]a_i,b_i[.$$
Donc
$$f^{-1}(O) = \bigcup_{i\in I} f^{-1}(]a_i,b_i[)$$
est une union d'ouvert donc un ouvert de X .
2. Nous le faisons d'abord pour un intervalle ouvert $]a,b[$.
$$]a,b[= \bigcup_{j\in\mathbb{N}^*} [a+\frac{1}{n}, b-\frac{1}{n}].$$
Donc
$$f^{-1}(]a,b[) = \bigcup_{j\in\mathbb{N}^*} f^{-1}([a+\frac{1}{j}, b-\frac{1}{j}]),$$
est une union dénombrable de fermés. Maintenant comme pour la première question, tout ouvert O de $\mathbb{R}$ s'écrit $O = \bigcup_{i\in I}]a_i,b_i[$, avec I dénombrable. Donc on peut écrire
$$f^{-1}(O) = \bigcup_{i\in I} \bigcup_{j\in\mathbb{N}^*} f^{-1}([a_i+\frac{1}{j}, b_i-\frac{1}{j}]),$$
qui est une union dénombrable de fermés (mais c'est un ouvert !).

Correction de l'exercice 2 ▲

1. Soit F l'application définie par $F(f) = \int_0^1 |f|$. Alors
$$|F(f)-F(g)| = |\int_0^1 |f|-|g|| \leqslant \int_0^1 |f-g| = d_1(f,g) \leqslant d_\infty(f,g).$$
Donc pour les deux distances d_1 et d_∞, F est lipschitzienne de rapport 1.
2. Soit $\varepsilon > 0$ alors en posant $\eta = \varepsilon$ on obtient la continuité : si $d(x,y) < \varepsilon$ alors
$$|\ell(x)-\ell(y)| \leqslant \varepsilon.$$
Donc ℓ est continue, et $c_0 = \ell{-}1(\{0\})$ est un fermé , car c'est l'image réciproque du fermé $\{0\}$ par l'application continue ℓ.

Correction de l'exercice 3 ▲

Soit $A = \{x \in X \mid f(x) = g(x)\}$. Alors soit $C = X \setminus A = \{x \in X \mid f(x) \neq g(x)\}$. Soit $x \in C$ comme $f(x) \neq g(x)$ et que Y est séparé, il existe un voisinage ouvert V_1 de $f(x)$ et V_2 de $g(x)$ tel que $V_1 \cap V_2 = \varnothing$. Notons $U =$

$f^{-1}(V_1) \cap g^{-1}(V_2)$. Alors U est un ouvert de X contenant x. Maintenant pour $x' \in U$, alors $f(x') \in V_1$, $g(x') \in V_2$ donc $f(x') \neq g(x')$, donc $x' \in C$. Bilan U est inclus dans C. Donc C est ouvert.
Application : si A est dense dans X alors $\bar{A} = X$, mais comme A est fermé $A = \bar{A}$. Donc $A = X$, c'est-à-dire f et g sont égales partout.

Correction de l'exercice 4 ▲

1. Soit P un polynôme, et F un fermé de $\mathbb{R}$. Soit (y_n) une suite convergente d'éléments de $P(F)$, et $y \in \mathbb{R}$ sa limite. Il existe $x_n \in F$ tel que $y_n = P(x_n)$. Comme (y_n) est bornée (car convergente) alors (x_n) aussi est bornée, en effet un polynôme n'a une limite infini qu'en $\pm\infty$. Comme (x_n) est une suite bornée de $\mathbb{R}$ on peut en extraire une sous-suite convergente $(x_{\phi(n)})$ de limite x. Comme F est fermé, $x \in F$. Comme P est continue (c'est un polynôme) alors $y_{\phi(n)} = P(x_{\phi(n)}) \to P(x)$, mais $(y_{\phi(n)})$ converge aussi vers y. Par unicité de la limite $y = P(x) \in P(F)$. Donc $P(F)$ est fermé.
2. Soit $X = Y = \mathbb{R}$ et $H = (xy = 1)$ est un fermé de $X \times Y$, mais si $\pi(x,y) = x$ alors $\pi(H) = \mathbb{R}^*$ n'est pas un fermé de $X = \mathbb{R}$.
3. A vérifier...

Correction de l'exercice 5 ▲

1. $\Rightarrow$. Soit f continue et $y \in f(\bar{A})$. Il existe $x \in \bar{A}$ tel que $y = f(x)$. Soit $x_n \in A$ tel que (x_n) converge vers x. Alors $y_n = f(x_n) \in A$. Comme f est continue alors (y_n) converge vers $f(x) = y$. Donc y est adhérent à $f(A)$. Conclusion $f(\bar{A}) \subset \overline{f(A)}$.

   $\Leftarrow$. Soit $f : X \to Y$ et soit F un fermé de Y. Notons $A = f^{-1}(F)$. Alors $f(A) \subset F$ donc l'équation $f(\bar{A}) \subset \overline{f(A)}$ devient $f(\bar{A}) \subset \bar{F} = F$ car F est fermé. Donc $\bar{A} \subset f^{-1}(F) = A$. Donc $\bar{A} \subset A$, d'où $\bar{A} = A$. Donc A est fermé. Bilan l'image réciproque de tout fermé F est un fermé, donc f est continue.

   Application : si A est dense, alors $\bar{A} = X$, et sous les hypothèses précédentes alors $f(A)$ est dense dans l'image de X par f : en effet $\overline{f(A)}$ contient $f(\bar{A}) = f(X)$
2. $\Rightarrow$. Soit f fermé et soit $A \subset X$. Alors $A \subset \bar{A}$ donc $f(A) \subset f(\bar{A})$, donc comme $\bar{A}$ est un fermé et f est fermée alors $f(\bar{A})$ est un fermé contenant $f(A)$. Mais comme $\overline{f(A)}$ est le plus petit fermé contenant $f(A)$ alors $\overline{f(A)} \subset f(\bar{A})$.

   $\Leftarrow$. La relation pour un fermé F donne $\overline{f(F)} \subset f(\bar{F}) = f(F)$. Donc $\overline{f(F)} = f(F)$. Donc $f(F)$ est fermé. Donc f est fermée.

   Même type de raisonnement avec f ouverte.

Correction de l'exercice 8 ▲

1. Supposons que f ne tende pas vers 0. Soit $\varepsilon > 0$ fixé. Pour tout $n \geqslant 0$, il existe $x_n \geqslant n$ tel que $|f(x_n)| > \varepsilon$. Sans perte de généralité nous supposons $f(x_n) > \varepsilon$. Appliquons l'uniforme continuité : soit $\varepsilon' = \frac{\varepsilon}{2}$, Il existe η tel que pour $|x_n - y| \leqslant \eta$ on ait $|f(x_n) - f(y)| < \varepsilon'$. Donc pour un tel y, $f(y) > \frac{\varepsilon}{2} > 0$. Donc f est strictement positive sur $[x_n - \eta, x_n + \eta]$. Notons alors (p_n) définie par $p_{2n} = x_n - \eta$, $p_{2n+1} = x_n + \eta$. Soit $I(x) = \int_0^x f$. Alors $I(p_{2n+1}) - I(p_{2n}) = \int_{x_n-\eta}^{x_n+\eta} f(t)dt \geqslant \frac{\varepsilon}{2} \cdot 2\eta = \varepsilon\eta$. Donc la suite $(I(p_n))$ n'est pas de une suite de Cauchy, donc ne converge pas, donc la fonction $x \mapsto I(x)$ ne converge pas non plus, et donc $\int_0^\infty f(t)dt$ diverge.
2. Par le changement de variable $u = t^2$ puis une intégration par partie, on montre que l'intégrale $\int_0^\infty \sin(t^2)dt$ converge, mais comme $f(x) = \sin(x^2)$ ne tend pas vers 0 alors f n'est pas uniformément continue sur $\mathbb{R}$.

Correction de l'exercice 9 ▲

Pour $x = (x_1, x_2) \in E_1 \times E_2$ on définit $\|x\| = \max(\|x_1\|, \|x_2\|)$.

1. Sens $\Leftarrow$. Soit $M>0$ tel que $\|B(x)\| \leqslant M\|x_1\|\|x_2\|$. Montrons que B en continue au point $x=(x_1,x_2)$ fixé. Soit $y=(y_1,y_2)$ alors
$$B(x+y)-B(x)=B(x_1+y_1,x_2+y_2)-B(x_1,x_2)=B(x_1,y_2)+B(x_2,y_1)+B(y_1,y_2).$$
Donc
$$\|B(x+y)-B(x)\| \leqslant M\|x_1\|\|y_2\|+M\|x_2\|\|y_1\|+M\|y_1\|\|y_2\|.$$
Pour $\|y_1\| \leqslant \frac{\varepsilon}{M\|x_1\|}$ on a $M\|x_1\|\|y_2\| \leqslant \varepsilon$ (si $x_1=0$ il n'y a rien à choisir ici). Pour $\|y_2\| \leqslant \frac{\varepsilon}{M\|x_2\|}$ on a $M\|x_2\|\|y_1\| \leqslant \varepsilon$ (si $x_2=0$ il n'y a rien à choisir ici). Enfin pour $\|y_1\| \leqslant \sqrt{\frac{\varepsilon}{M}}$ et $\|y_2\| \leqslant \sqrt{\frac{\varepsilon}{M}}$ on a $M\|y_1\|\|y_2\| \leqslant \varepsilon$. Donc en prenant $\eta=\min(\frac{\varepsilon}{M\|x_1\|},\frac{\varepsilon}{M\|x_2\|},\sqrt{\frac{\varepsilon}{M}})$, on obtient que pour $\|y\|=\max(\|y_1\|,\|y_2\|) \leqslant \eta$ on a $\|B(x+y)-B(x)\| \leqslant 3\varepsilon$. Ce qui prouve la continuité. Donc B est continue sur $E_1\times E_2$.
2. Sens $\Rightarrow$. Si B est continue partout, en particulier elle est continue en 0. Je choisis $\varepsilon=1$, il existe $\eta>0$ tel que $\|x\| \leqslant \eta$ alors $\|B(x)\| \leqslant 1$. Donc pour $\|x_1\| \leqslant \eta$ et $\|x_2\| \leqslant \eta$ on a $\|B(x_1,x_2)\| \leqslant 1$. Soit maintenant $y=(y_1,y_2)\in E_1\times E_2$, $(y_1\neq 0, y_2\neq 0)$ on a $(\eta\frac{y_1}{\|y_1\|},\eta\frac{y_2}{\|y_2\|})$ de norme $\leqslant \eta$ donc $B(\eta\frac{y_1}{\|y_1\|},\eta\frac{y_2}{\|y_2\|}) \leqslant 1$ et par bilinéarité cela fournit : $B(y_1,y_2) \leqslant \frac{1}{\eta^2}\|y_1\|\|y_2\|$, et ce pour tout (y_1,y_2). La constante cherchée étant $\frac{1}{\eta^2}$.

Correction de l'exercice 10 ▲

Comme L est linéaire il suffit de montrer que L est continue en 0. Supposons que cela ne soit pas vrai, alors il faut nier la continuité de L en 0 qui s'écrit :
$$\forall\varepsilon>0 \qquad \exists\eta>0 \qquad \forall x\in E \qquad (\|x\|<\eta \Rightarrow \|L(x)\|<\varepsilon).$$
La négation s'écrit alors :
$$\exists\varepsilon>0 \qquad \forall\eta>0 \qquad \exists x\in E \qquad (\|x\|<\eta \text{ et } \|L(x)\| \geqslant \varepsilon).$$
Soit donc un tel $\varepsilon>0$ de la négation, pour η de la forme $\eta=\frac{1}{n}$, on obtient y_n tel que $\|y_n\|<\frac{1}{n}$ et $\|L(y_n)\| \geqslant \varepsilon$. On pose $x_n=\sqrt{n}y_n$, alors $\|x_n\|=\sqrt{n}\|y_n\|<\frac{1}{\sqrt{n}}$ donc (x_n) est une suite de E qui tend vers 0. Par contre $\|L(x_n)\|=\sqrt{n}\|L(y_n)\| \geqslant \varepsilon\sqrt{n}$, donc la suite $(L(x_n))$ n'est pas bornée. Par contraposition nous avons obtenu le résultat souhaité.

Correction de l'exercice 11 ▲

1. Si f est linéaire et bornée sur la boule unité alors elle est continue (voir le cours ou refaire la démonstration).
2. Il reste à montrer que f est linéaire : on a déjà $f(x+y)=f(x)+f(y)$ pour tout x,y reste donc à prouver $f(\lambda x)=\lambda f(x)$. Pour tout $\lambda\in\mathbb{R}$ et $x\in E$.
   - Pour $\lambda\in\mathbb{Z}$, c'est une récurrence, $f(2x)=f(x+x)=f(x)+f(x)=2f(x)$. Puis $f(3x)=f(2x+x)=f(2x)+f(x)=2f(x)+f(x)=3f(x)$ etc. Donc $f(nx)=nf(x)$ pour $n\in\mathbb{N}$. De plus $0=f(0)=f(x+(-x))=f(x)+f(-x)$ donc $f(-x)=-f(x)$. Ensuite on a $f(-nx)=-nf(x)$ pour $n\in\mathbb{N}$. Bilan : pour tout $\lambda\in\mathbb{Z}$ on a $f(\lambda x)=\lambda f(x)$.
   - Pour $\lambda\in\mathbb{Q}$, soit $\lambda=\frac{p}{q}$, $p,q\in\mathbb{Z}$.
   $$f(\frac{p}{q}x)=pf(\frac{1}{q}x)=\frac{p}{q}qf(\frac{x}{q})=\frac{p}{q}f(q\frac{x}{q})=\frac{p}{q}f(x).$$
   Nous avons utilisé intensivement le premier point.
   - Soit $\lambda\in\mathbb{R}$ alors il existe une suite (λ_n) d'élément de $\mathbb{Q}$ qui converge vers λ. Fixons $x\in E$.
   $$f(\lambda x)-\lambda f(x)=f(\lambda x)-f(\lambda_n x)+f(\lambda_n x)-\lambda f(x)=f((\lambda-\lambda_n)x)+(\lambda_n-\lambda)f(x).$$
   Nous avons utilisé le second point. Soit $\varepsilon\in\mathbb{Q}_+^*$. Pour n assez grand on a $\|(\lambda-\lambda_n)x\|<\varepsilon$. Donc $\|\frac{1}{\varepsilon}(\lambda-\lambda_n)x\|\in B(0,1)$ or f est bornée sur la boule unité donc il existe $M>0$ tel que $f(\frac{1}{\varepsilon}(\lambda-$

$\lambda_n)x) \leqslant M$ (quelque soit n). Donc $f(\lambda-\lambda_n)x) \leqslant M\varepsilon$ (ε est rationnel donc on peut le "sortir"). De même pour n assez grand on a $(\lambda_n-\lambda)f(x) < \varepsilon$. Maintenant

$$\|f(\lambda x)-\lambda f(x)\| \leqslant \|f((\lambda-\lambda_n)x)\| + \|(\lambda_n-\lambda)f(x)\| < M\varepsilon+\varepsilon.$$

Donc pour x,λ fixés, $\|f(\lambda x)-\lambda f(x)\|$ est aussi petit que l'on veut, donc est nul ! D'où $f(\lambda x) = \lambda f(x)$ pour $\lambda \in \mathbb{R}$.

Correction de l'exercice 12 ▲

1. Pour tout x, $\|S(x)\| = \|x\|$ donc $\|S\| = 1$.
2. $\|T(f)\|_\infty = \|f\times g\|_\infty \leqslant \|f\|_\infty\|g\|_\infty$. Donc pour $f \neq 0$, $\frac{\|T(f)\|_\infty}{\|f\|_\infty} \leqslant \|g\|_\infty$. De plus en g, on obtient $\frac{\|T(g)\|_\infty}{\|g\|_\infty} = \frac{\|g^2\|_\infty}{\|g\|_\infty} = \|g\|_\infty$. Donc $\|T\| = \|g\|_\infty$.
3. On a $|u(f)| \leqslant \|f\|_\infty \int_0^1 |g(x)|dx$ donc $\|u\| \leqslant \int_0^1 |g(x)|dx$. Si g ne change pas de signe sur $[0,1]$ alors pour f la fonction constant égale à 1, on obtient $|u(f)| = \|f\|_\infty \int_0^1 |g(x)|dx$ donc $\|u\| = \int_0^1 |g(x)|dx$. Si g change de signe alors il ne le fait qu'une fois et en $\frac{1}{2}$. Soit h_n la fonction définie par $h_n(x) = 1$ si $x \in [0, \frac{1}{2}-\frac{1}{n}]$, $h_n(x) = -1$ si $x \in [\frac{1}{2}+\frac{1}{n}, 1]$ et h_n est affine sur $[\frac{1}{2}-\frac{1}{n}, \frac{1}{2}+\frac{1}{n}]$ et continue sur $[0,1]$. Cette fonction est construite de telle sorte que si g est positive puis négative alors $h_n \times g$ est une fonction continue qui converge uniformément vers $|g|$: $\|h_n g - |g|\|_\infty \to 0$. Donc $|u(h_n)| = \int_0^1 h_n \times g$ et par la convergence uniforme alors $|u(h_n)|$ converge vers $\int_0^1 |g|$. Donc $\|u\| = \int_0^1 |g|$.
4. $|u(x)| = |\sum a_n x_n| \leqslant \|a_n\|_2 \|x_n\|_2$ (c'est Cauchy-Schwartz) donc $\|u\| \leqslant \|a_n\|_2$. Pour la suite $x = a$ on a égalité d'où $\|u\| = \|a_n\|_2$.
5. $|u(x)| = |\sum a_n x_n| \leqslant \sum |a_n x_n| \leqslant \|a\|_\infty \sum |x_n| = \|a\|_\infty \|x_n\|_1$, donc $\|u\| \leqslant \|a\|_\infty$. Soit p fixé, soit $i(p)$ un indice tel que $|a_{i(p)}| = \max_{j=1,\ldots,p} |a_j|$. On construit une suite x^p de la manière suivante : $x^p = (0,0,\ldots,0,a_{i(p)},0,0,0\ldots)$ (des zéros partout sauf $a_{i(p)}$ à la place $i(p)$). Alors $\|x^p\|_1 = |a_{i(p)}|$ et $|u(x^p)| = a_{i(p)}^2$. Donc $\frac{|u(x^p)|}{\|x^p\|_1} = |a_{i(p)}|$. Lorsque p tend vers $+\infty$, $|a_{i(p)}| \to \|a\|_\infty$. Donc $\|u\| = \|a\|_\infty$.
6. $|u(x)| = |\lim x_n| \leqslant \|x\|_\infty$, donc $\|u\| \leqslant 1$. Pour $x = (1,1,1,\ldots)$ on obtient l'égalité $\|u\| = 1$.

Correction de l'exercice 13 ▲

1. Il suffit de l'écrire...
2. Calculons la norme de U : $\|U(P)\| = \sup_k |\frac{1}{k}a_k\| \leqslant \sup_k |a_k| \leqslant \|P\|$. Donc pour tout P, $\frac{\|U(P)\|}{\|P\|} \leqslant 1$. Et pour $P(x) = x$ on a égalité donc $\|U\| = 1$.
3. Pour V, prenons $P_k(x) = x^k$, alors $\|P_k\| = 1$, mais $\|V(P_k)\| = k$. Donc V n'est pas bornée sur la boule unité donc V n'est pas continue.

Correction de l'exercice 14 ▲

1. A injective : Si $A(x_1,x_2,\ldots) = A(y_1,y_2,\ldots)$ alors $(x_1,x_2/2,...,x_n/n,...) = (y_1,y_2/2,...,y_n/n,...)$ donc $x_1 = y_1$, $x_2 = y_2$,..., $x_n = y_n$,... Donc A est injective.
   A continue : $\|A(x)\|_\infty = \sup_n \frac{x_n}{n} \leqslant \sup_n x_n \leqslant \|x\|_\infty$. Donc $\|A\| \leqslant 1$ donc A est continue.
   Norme de A : Pour $x = (1,0,0,\ldots)$. On a $\|x\|_\infty = 1$ et $\|A(x)\|_\infty = 1$ Donc la norme de A est exactement 1.
   A n'est pas surjective : posons $y = (1,1,1,\ldots) \in l^\infty$. Soit x une suite telle que $A(x) = y$ alors $x = (1,2,3,4,\ldots)$. Mais $\|x\|_\infty = +\infty$ donc $x \notin l^\infty$. En conséquence $A : l^\infty \to l^\infty$ n'est pas surjective.
2. L'inverse à gauche de A est B définie par
   $$B(x_1,x_2,...,x_n,...) = (x_1,2x_2,...,nx_n,...)$$
   de sorte que pour $x \in l^\infty$ on ait $B\circ A(x) = x$. Posons la suite $x^p = (0,0,\ldots,0,1,0,0\ldots) \in l^\infty$ (des zéros partout et le 1 à la p-ième place). Alors $\|x^p\|_\infty = 1$ et $\|B(x^p)\|_\infty = p$. Donc $\frac{\|B(x^p)\|_\infty}{\|x^p\|_\infty} = k$, donc la norme de B n'est pas finie et B n'est pas continue.

Correction de l'exercice 15 ▲

1. Si $L(a)=0$ alors $a\in H$ donc $\mathrm{dist}(a,H)=0$ donc la relation est vraie. Supposons que $L(a)\neq 0$. Alors on a $X=H+\mathbb{R}.a$. En effet pour $x\in X$, il existe $\lambda\in\mathbb{R}$ tel que $L(x)=\lambda L(a)$. Donc $L(x-\lambda a)=0$. Posons $h=x-\lambda a$, alors $h\in H$ et $x=h+\lambda a$ est la décomposition suivant $H+\mathbb{R}.a$.

   Si L est continue alors $\|L\|$ est finie.

$$\begin{aligned}
\|L\| &= \sup_{x\in X, x\neq 0}\frac{\|L(x)\|}{\|x\|}\\
&= \sup_{h\in H,\lambda\in\mathbb{R}, h+\lambda a\neq 0}\frac{\|L(h+\lambda a)\|}{\|h+\lambda a\|}\\
&= |L(a)|\sup_{h\in H,\lambda\in\mathbb{R}, h+\lambda a\neq 0}\frac{|\lambda|}{\|h+\lambda a\|}\\
&= |L(a)|\sup_{h\in H}\frac{1}{\|h+a\|}\\
&= |L(a)|\frac{1}{\inf_{h\in H}\|h+a\|}\\
&= |L(a)|\frac{1}{\mathrm{dist}(a,H)}
\end{aligned}$$

   Ce qui était l'égalité demandée.

2. Si H est fermé alors $\mathrm{dist}(a,H)>0$ si $a\notin H$ (voir les exercices sur les compacts), par l'égalité démontrée ci-dessus on a $\|L\|$ finie donc L est continue.
3. Soit $X=\mathbb{R}[x]$. Pour $P(x)=\sum_{k=0}^{p}a_kx^k$ on pose $\|P\|=\sup_k|a_k|$, et $V(P)(x)=\sum_{k=1}^{n}ka_kx^k$. Alors $\mathrm{Ker}\,V=\{0\}$ est fermé mais V n'est pas continue (voir l'exercice 13).

Correction de l'exercice 16 ▲

Notons $L:X\to\mathbb{R}$ l'application linéaire définie par $L(f)=f(0)$. Prenons f_n définie par $f_n(t)=2n(1-nt)$ pour $t\in[0,\frac{1}{n}]$ et $f(t)=0$ si $t>\frac{1}{n}$. Alors $\|f_n\|=1$ alors que $L(f_n)=2n$. Donc le rapport $\frac{|L(f_n)|}{\|f_n\|}=2n$ n'est pas borné, donc L n'est pas continue. Si $H=\{f\mid f(0)=0\}$ alors $H=\mathrm{Ker}\,L=L^{-1}(0)$. Comme L n'est pas continue alors H n'est pas fermé (voir l'exercice 15).

Correction de l'exercice 17 ▲

N est bien une norme. Et on a pour tout x, $(1+x^2)|f(x)|\leqslant N(f)$.

$$|L(f)|=|\int_{\mathbb{R}}f|\leqslant\int_{\mathbb{R}}|f|\leqslant\int_{\mathbb{R}}\frac{N(f)}{1+x^2}dx\leqslant N(f)\int_{\mathbb{R}}\frac{1}{1+x^2}=N(f)[\arctan x]_{-\infty}^{+\infty}=N(f)\pi.$$

Donc pour tout f on a

$$\frac{\int f}{N(f)}\leqslant\pi.$$

De plus pour $f(x)=\frac{1}{1+x^2}$ on obtient l'égalité. Donc la norme $\|L\|$ de l'application L est π.