



## Continuité

---

### Applications continues

#### Exercice 1

---

Soit  $X$  un espace topologique et  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ .

1. Montrer que  $f$  est continue si et seulement si pour tout  $\lambda \in \mathbb{R}$ , les ensembles  $\{x; f(x) < \lambda\}$  et  $\{x; f(x) > \lambda\}$  sont des ouverts de  $X$ .
2. Montrer que si  $f$  est continue, pour tout  $\omega$  ouvert de  $\mathbb{R}$ ,  $f^{-1}(\omega)$  est un  $F_\sigma$  ouvert de  $X$  ( $F_\sigma$  = réunion dénombrable de fermés).

[Indication ▼](#)   [Correction ▼](#)

[002353]

#### Exercice 2

---

1. Soit  $C$  l'espace des fonctions continues réelles sur  $[0, 1]$  muni de la métrique  $d_1(f, g) = \int_0^1 |f - g| dx$ , puis de la métrique  $d_\infty(f, g) = \sup_x |f(x) - g(x)|$ . Vérifier que l'application  $f \rightarrow \int_0^1 |f| dx$  de  $C$  dans  $\mathbb{R}$  est 1-lipschitzienne dans les deux cas.
2. Soit  $c$  l'espace des suites réelles convergentes, muni de la métrique  $d(x, y) = \sup_n |x(n) - y(n)|$ . Si on désigne par  $\ell(x)$  la limite de la suite  $x$ , montrer que  $\ell$  est une application continue de  $c$  dans  $\mathbb{R}$ . En déduire que  $c_0$  est fermé dans  $c$ .

[Indication ▼](#)   [Correction ▼](#)

[002354]

#### Exercice 3

---

Soit  $f, g$  deux applications continues de  $X$  dans  $Y$ , espaces topologiques,  $Y$  étant séparé. Montrer que  $\{f = g\}$  est fermé dans  $X$ ; en déduire que si  $f$  et  $g$  coïncident sur une partie dense de  $X$ , alors  $f = g$ .

[Indication ▼](#)   [Correction ▼](#)

[002355]

#### Exercice 4

---

Une application de  $X$  dans  $Y$  est dite *ouverte* si l'image de tout ouvert de  $X$  est un ouvert de  $Y$ ; *fermée* si l'image de tout fermé de  $X$  est un fermé de  $Y$ .

1. Montrer qu'une fonction polynomiale de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  est une application fermée.
2. Montrer que l'application  $(x, y) \in X \times Y \rightarrow x \in X$  est ouverte mais pas nécessairement fermée (considérer l'hyperbole équilatère de  $\mathbb{R}^2$ ).
3. Montrer que la fonction indicatrice de l'intervalle  $[0, \frac{1}{2}]$ , comme application de  $\mathbb{R}$  dans  $\{0, 1\}$ , est surjective, ouverte, fermée, mais pas continue.
4. Montrer que toute application ouverte de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  et continue est monotone.

**Exercice 5**

1. Montrer que  $f$  est continue si et seulement si  $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$  pour tout  $A$  dans  $X$ . Que peut-on dire alors de l'image par  $f$  d'un ensemble dense dans  $X$ ?
2. Montrer que  $f$  est fermée si et seulement si  $\overline{f(A)} \subset f(\overline{A})$ , et que  $f$  est ouverte si et seulement si  $f(\overset{\circ}{A}) \subset \overset{\circ}{f(A)}$ .

**Applications uniformément continues****Exercice 6**

1. Soit  $f$  une fonction réelle continue sur  $[0, 1]$ ; montrer que  $f$  est "presque lipschitzienne" au sens :  
 $\forall \varepsilon > 0 \exists C_\varepsilon ; \forall x, y \in [0, 1] \quad |f(x) - f(y)| \leq C_\varepsilon |x - y| + \varepsilon.$
2. Montrer qu'une fonction  $f$  uniformément continue de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  vérifie pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $|f(x)| \leq a|x| + b$  où  $a$  et  $b$  sont des constantes.

**Exercice 7**

Soit  $f$  une fonction continue de  $]0, 1[$  dans  $\mathbb{R}$ . Montrer que, si  $f$  est uniformément continue, elle est bornée. Réciproque ?

**Exercice 8**

Soit  $f$  une fonction uniformément continue sur  $\mathbb{R}$  telle que  $\int_0^\infty f(t)dt$  converge. Montrer que  $f$  tend vers 0 quand  $x \rightarrow +\infty$ . Retrouver ainsi le fait que la fonction  $\sin(x^2)$  n'est pas uniformément continue.

**Applications linéaires bornées****Exercice 9**

Soient  $E_1, E_2$  et  $F$  des espaces normés sur  $\mathbb{R}$  et soit  $B : E_1 \times E_2 \rightarrow F$  une application bilinéaire. Montrer que  $B$  est continue si et seulement s'il existe  $M > 0$  tel que

$$\|B(x)\| \leq M \|x_1\| \|x_2\| \quad \text{pour tout } x = (x_1, x_2) \in E_1 \times E_2 .$$

**Exercice 10**

Soient  $E$  et  $F$  deux espaces normés et  $L : E \rightarrow F$  une application linéaire vérifiant:  $(L(x_n))_n$  est bornée dans  $F$  pour toute suite  $(x_n)_n$  de  $E$  tendant vers  $0 \in E$ . Montrer que  $L$  est continue.

### Exercice 11

Soient  $E$  et  $F$  deux espaces normés réels et  $f : E \rightarrow F$  une application bornée sur la boule unité de  $E$  et vérifiant

$$f(x+y) = f(x) + f(y) \quad \text{pour tout } x, y \in E .$$

Montrer que  $f$  est linéaire continue.

[Indication ▼](#)      [Correction ▼](#)

[002363]

### Exercice 12

Calculer la norme des opérateurs suivants:

- Le shift sur  $l^\infty$  défini par  $S(x)_{n+1} = x_n, S(x)_0 = 0$ .
- $X = \mathcal{C}([0, 1])$  muni de la norme  $\|\cdot\|_\infty$  et  $Tf(x) = f(x)g(x)$  où  $g \in X$ .

Calculer la norme des formes linéaires suivantes:

- $X = \mathcal{C}([0, 1])$  muni de la norme  $\|\cdot\|_\infty$  et  $u(f) = \int_0^1 f(x)g(x) dx$  où  $g \in X$  est une fonction qui ne s'annule qu'en  $x = 1/2$ .
- $X = l^2$  et  $u(x) = \sum a_n x_n$  où  $(a_n)$  est dans  $X$ .
- $X = l^1$  et  $u(x) = \sum a_n x_n$  où  $(a_n)$  est dans  $l^\infty$ .
- $X$  l'espace des suites convergentes muni de la norme sup et  $u : X \rightarrow \mathbb{R}$  l'application  $u(x) = \lim_{j \rightarrow \infty} x_j$ .

[Indication ▼](#)      [Correction ▼](#)

[002364]

### Exercice 13

Soit  $X = \mathbb{R}[x]$  l'ensemble des polynômes. Pour  $P(x) = \sum_{k=0}^p a_k x^k$  on pose  $\|P\| = \sup_k |a_k|$ ,  $U(P)(x) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} a_k x^k$  et  $V(P)(x) = \sum_{k=1}^n k a_k x^k$ .

1. Montrer que  $\|\cdot\|$  définit une norme et que  $U$  et  $V$  définissent des applications linéaires de  $X$  dans  $X$ .
2. Examiner si  $U$  et  $V$  sont continues?

[Indication ▼](#)      [Correction ▼](#)

[002365]

### Exercice 14

Soit  $l^\infty$  l'espace des suites réelles muni avec la norme uniforme, i.e.  $\|x\|_\infty = \sup_n |x_n|$ . On considère l'application  $A : l^\infty \rightarrow l^\infty$  définie par

$$A(x_1, x_2, \dots, x_n, \dots) = (x_1, x_2/2, \dots, x_n/n, \dots) .$$

Montrer que :

1.  $A$  est injective et continue avec  $\|A\| = 1$ . Par contre,  $A$  n'est pas surjective.
2.  $A$  admet un inverse à gauche mais qu'il n'est pas continu.

[Correction ▼](#)

[002366]

### Exercice 15

Soit  $X$  un espace normé,  $L : X \rightarrow \mathbb{R}$  une forme linéaire non nulle et  $H = L^{-1}(\{0\})$  son noyau.

1. Montrer que, si  $L$  est continue, alors  $H$  est un sous-espace fermé dans  $X$ . Établir la relation

$$\text{dist}(a, H) = \frac{|L(a)|}{\|L\|} \quad \text{pour tout } a \in X .$$

2. Réciproquement, supposons que le noyau  $H$  est un fermé. Démontrer alors que  $\text{dist}(a, H) > 0$  dès que  $a \in X \setminus H$  et en déduire que  $L$  est continue de norme au plus  $|L(a)|/\text{dist}(a, H)$ .
3. Peut-on généraliser ceci à des applications linéaires entre espaces normés?

[Indication ▼](#)    [Correction ▼](#)

[002367]

---

### Exercice 16

Soit  $X = \mathcal{C}([0, 1])$  avec la norme  $\|f\| = \int_0^1 |f(t)| dt$ . Montrer que la forme linéaire  $f \in X \mapsto f(0) \in \mathbb{R}$  n'est pas continue. Que peut-on en déduire pour le sous-espace des fonctions de  $X$  nulles en 0?

[Correction ▼](#)

[002368]

---

### Exercice 17

Soit  $X = \{f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}) ; (1+x^2)|f(x)| \text{ soit bornée}\}$ . On pose  $N(f) = \sup_{x \in \mathbb{R}} (1+x^2)|f(x)|$ . Vérifier que  $N$  est une norme, puis montrer que la forme linéaire suivante  $L$  est continue et calculer sa norme:

$$L : X \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{définie par} \quad L(f) = \int_{\mathbb{R}} f(x) dx .$$

[Indication ▼](#)    [Correction ▼](#)

[002369]

---

**Indication pour l'exercice 1 ▲**

---

1. Utiliser le fait que tout ouvert de  $\mathbb{R}$  est l'union dénombrable d'intervalles ouverts.
  2. Écrire un intervalle fermé comme union dénombrable d'intervalles ouverts, puis utiliser la même remarque que ci-dessus.
- 

---

**Indication pour l'exercice 2 ▲**

---

1. ....
  2. Pour montrer que  $c_0$  est fermé, l'écrire comme image réciproque de quelque chose.
- 

---

**Indication pour l'exercice 3 ▲**

---

Montrer que le complémentaire est un ouvert. Si vous le souhaitez, placez-vous dans des espaces métriques.

---

---

**Indication pour l'exercice 4 ▲**

---

1. Pour un polynôme  $P$ , la limite de  $P(x)$  ne vaut  $\pm\infty$  que lorsque  $x$  tend vers  $\pm\infty$ .
- 

---

**Indication pour l'exercice 5 ▲**

---

1. Pour le sens direct utiliser la caractérisation de l'adhérence par les suites. Pour le sens réciproque, montrer que l'image réciproque d'un fermé est un fermé.
- 

---

**Indication pour l'exercice 8 ▲**

---

1. Par l'absurde, considérer  $I(x) = \int_0^x f$ . Trouver une suite  $(p_n)$  telle que  $(I(p_n))$  ne soit pas une suite de Cauchy.
  2. Pour montrer que cette intégrale converge utiliser le changement de variable  $u = t^2$  puis faire une intégration par partie.
- 

---

**Indication pour l'exercice 9 ▲**

---

Si la relation est vérifiée montrer que  $B$  est continue en  $x$  en calculant  $B(x+y) - B(x)$ . Si  $B$  est continue alors en particulier  $B$  est continue en  $(0,0)$ , fixer le  $\varepsilon$  de cette continuité,...

---

---

**Indication pour l'exercice 10 ▲**

---

La continuité de  $L$  sur  $E$  équivaut la continuité en 0. Par l'absurde supposer que  $L$  n'est pas continue en 0 et construire une suite  $(x_n)$  qui tend vers 0 mais avec  $(L(x_n))$  non bornée.

---

---

**Indication pour l'exercice 11 ▲**

---

Il faut montrer  $f(\lambda x) = \lambda f(x)$  pour  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Le faire pour  $\lambda \in \mathbb{N}$ , puis  $\lambda \in \mathbb{Z}$ , puis  $\lambda \in \mathbb{Q}$  et enfin  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

---

---

**Indication pour l'exercice 12 ▲**

---

1.  $\|S\| = 1$  ;
  2.  $\|T\| = \|g\|_\infty$  ;
  3.  $\|u\| = \int_0^1 |g|$ , on distinguera les cas où  $g$  reste de signe constant et  $g$  change de signe ;
  4.  $\|u\| = \|a_n\|_2$  ;
  5.  $\|u\| = \|a\|_\infty$  ;
  6.  $\|u\| = 1$ .
- 

**Indication pour l'exercice 13 ▲**

---

$U$  est continue et  $\|U\| = 1$ ,  $V$  n'est pas continue.

---

**Indication pour l'exercice 15 ▲**

---

1. Montrer d'abord que  $X$  se décompose sous la forme  $H + \mathbb{R}.a$ .
  2. ...
  3. Non ! Chercher un contre-exemple dans les exercices précédents.
- 

**Indication pour l'exercice 17 ▲**

---

Montrer que  $\|L\| = \pi$ .

---

## Correction de l'exercice 1 ▲

---

1. Sens direct. Si  $f$  est continue alors  $\{x \mid f(x) < \lambda\} = f^{-1}(]-\infty, \lambda[)$  est un ouvert comme image réciproque par une application continue de l'intervalle ouvert  $]-\infty, \lambda[$ . De même avec  $]\lambda, +\infty[$ .

Réciproque. Tout d'abord, tout intervalle ouvert  $]a, b[$ , ( $a < b$ ) peut s'écrire

$$]a, b[ = ]-\infty, b[ \cap ]a, +\infty[.$$

Donc

$$f^{-1}(]a, b[) = f^{-1}(]-\infty, b[) \cap f^{-1}(]a, +\infty[)$$

est une intersection de deux ouverts donc un ouvert de  $X$ . Soit  $O$  un ouvert de  $\mathbb{R}$ , alors  $O$  peut s'écrire comme l'union dénombrables d'intervalles ouverts :

$$O = \bigcup_{i \in I} ]a_i, b_i[.$$

Donc

$$f^{-1}(O) = \bigcup_{i \in I} f^{-1}(]a_i, b_i[)$$

est une union d'ouverts donc un ouvert de  $X$ .

2. Nous le faisons d'abord pour un intervalle ouvert  $]a, b[$ .

$$]a, b[ = \bigcup_{j \in \mathbb{N}^*} [a + \frac{1}{j}, b - \frac{1}{j}].$$

Donc

$$f^{-1}(]a, b[) = \bigcup_{j \in \mathbb{N}^*} f^{-1}([a + \frac{1}{j}, b - \frac{1}{j}]),$$

est une union dénombrable de fermés. Maintenant comme pour la première question, tout ouvert  $O$  de  $\mathbb{R}$  s'écrit  $O = \bigcup_{i \in I} ]a_i, b_i[$ , avec  $I$  dénombrable. Donc on peut écrire

$$f^{-1}(O) = \bigcup_{i \in I} \bigcup_{j \in \mathbb{N}^*} f^{-1}([a_i + \frac{1}{j}, b_i - \frac{1}{j}]),$$

qui est une union dénombrable de fermés (mais c'est un ouvert !).

---

## Correction de l'exercice 2 ▲

---

1. Soit  $F$  l'application définie par  $F(f) = \int_0^1 |f|$ . Alors

$$|F(f) - F(g)| = \left| \int_0^1 |f| - |g| \right| \leq \int_0^1 |f - g| = d_1(f, g) \leq d_\infty(f, g).$$

Donc pour les deux distances  $d_1$  et  $d_\infty$ ,  $F$  est lipschitzienne de rapport 1.

2. Soit  $\varepsilon > 0$  alors en posant  $\eta = \varepsilon$  on obtient la continuité : si  $d(x, y) < \varepsilon$  alors

$$|\ell(x) - \ell(y)| \leq \varepsilon.$$

Donc  $\ell$  est continue, et  $c_0 = \ell^{-1}(\{0\})$  est un fermé, car c'est l'image réciproque du fermé  $\{0\}$  par l'application continue  $\ell$ .

---

### Correction de l'exercice 3 ▲

Soit  $A = \{x \in X \mid f(x) = g(x)\}$ . Alors soit  $C = X \setminus A = \{x \in X \mid f(x) \neq g(x)\}$ . Soit  $x \in C$  comme  $f(x) \neq g(x)$  et que  $Y$  est séparé, il existe un voisinage ouvert  $V_1$  de  $f(x)$  et  $V_2$  de  $g(x)$  tel que  $V_1 \cap V_2 = \emptyset$ . Notons  $U = f^{-1}(V_1) \cap g^{-1}(V_2)$ . Alors  $U$  est un ouvert de  $X$  contenant  $x$ . Maintenant pour  $x' \in U$ , alors  $f(x') \in V_1$ ,  $g(x') \in V_2$  donc  $f(x') \neq g(x')$ , donc  $x' \in C$ . Bilan  $U$  est inclus dans  $C$ . Donc  $C$  est ouvert.

Application : si  $A$  est dense dans  $X$  alors  $\bar{A} = X$ , mais comme  $A$  est fermé  $A = \bar{A}$ . Donc  $A = X$ , c'est-à-dire  $f$  et  $g$  sont égales partout.

---

### Correction de l'exercice 4 ▲

1. Soit  $P$  un polynôme, et  $F$  un fermé de  $\mathbb{R}$ . Soit  $(y_n)$  une suite convergente d'éléments de  $P(F)$ , et  $y \in \mathbb{R}$  sa limite. Il existe  $x_n \in F$  tel que  $y_n = P(x_n)$ . Comme  $(y_n)$  est bornée (car convergente) alors  $(x_n)$  aussi est bornée, en effet un polynôme n'a une limite infini qu'en  $\pm\infty$ . Comme  $(x_n)$  est une suite bornée de  $\mathbb{R}$  on peut en extraire une sous-suite convergente  $(x_{\phi(n)})$  de limite  $x$ . Comme  $F$  est fermé,  $x \in F$ . Comme  $P$  est continue (c'est un polynôme) alors  $y_{\phi(n)} = P(x_{\phi(n)}) \rightarrow P(x)$ , mais  $(y_{\phi(n)})$  converge aussi vers  $y$ . Par unicité de la limite  $y = P(x) \in P(F)$ . Donc  $P(F)$  est fermé.
  2. Soit  $X = Y = \mathbb{R}$  et  $H = \{(x, y) \mid xy = 1\}$  est un fermé de  $X \times Y$ , mais si  $\pi(x, y) = x$  alors  $\pi(H) = \mathbb{R}^*$  n'est pas un fermé de  $X = \mathbb{R}$ .
  3. A vérifier...
- 

### Correction de l'exercice 5 ▲

1.  $\Rightarrow$ . Soit  $f$  continue et  $y \in \overline{f(A)}$ . Il existe  $x \in \bar{A}$  tel que  $y = f(x)$ . Soit  $x_n \in A$  tel que  $(x_n)$  converge vers  $x$ . Alors  $y_n = f(x_n) \in A$ . Comme  $f$  est continue alors  $(y_n)$  converge vers  $f(x) = y$ . Donc  $y$  est adhérent à  $f(A)$ . Conclusion  $\overline{f(A)} \subset f(\bar{A})$ .  
 $\Leftarrow$ . Soit  $f : X \rightarrow Y$  et soit  $F$  un fermé de  $Y$ . Notons  $A = f^{-1}(F)$ . Alors  $f(A) \subset F$  donc l'équation  $f(\bar{A}) \subset \overline{f(A)}$  devient  $f(\bar{A}) \subset \bar{F} = F$  car  $F$  est fermé. Donc  $\bar{A} \subset f^{-1}(F) = A$ . Donc  $\bar{A} \subset A$ , d'où  $\bar{A} = A$ . Donc  $A$  est fermé. Bilan l'image réciproque de tout fermé  $F$  est un fermé, donc  $f$  est continue.  
Application : si  $A$  est dense, alors  $\bar{A} = X$ , et sous les hypothèses précédentes alors  $f(A)$  est dense dans l'image de  $X$  par  $f$  : en effet  $\overline{f(A)}$  contient  $f(\bar{A}) = f(X)$ .
  2.  $\Rightarrow$ . Soit  $f$  fermé et soit  $A \subset X$ . Alors  $A \subset \bar{A}$  donc  $f(A) \subset \overline{f(\bar{A})}$ , donc comme  $\bar{A}$  est un fermé et  $f$  est fermée alors  $\overline{f(\bar{A})}$  est un fermé contenant  $f(A)$ . Mais comme  $\overline{f(A)}$  est le plus petit fermé contenant  $f(A)$  alors  $\overline{f(A)} \subset \overline{f(\bar{A})}$ .  
 $\Leftarrow$ . La relation pour un fermé  $F$  donne  $\overline{f(F)} \subset \overline{f(\bar{F})} = f(\bar{F})$ . Donc  $\overline{f(F)} = f(\bar{F})$ . Donc  $f(F)$  est fermé. Donc  $f$  est fermée.  
Même type de raisonnement avec  $f$  ouverte.
- 

### Correction de l'exercice 8 ▲

1. Supposons que  $f$  ne tende pas vers 0. Soit  $\varepsilon > 0$  fixé. Pour tout  $n \geq 0$ , il existe  $x_n \geq n$  tel que  $|f(x_n)| > \varepsilon$ . Sans perte de généralité nous supposons  $f(x_n) > \varepsilon$ . Appliquons l'uniforme continuité : soit  $\varepsilon' = \frac{\varepsilon}{2}$ , Il existe  $\eta$  tel que pour  $|x_n - y| \leq \eta$  on ait  $|f(x_n) - f(y)| < \varepsilon'$ . Donc pour un tel  $y$ ,  $f(y) > \frac{\varepsilon}{2} > 0$ . Donc  $f$  est strictement positive sur  $[x_n - \eta, x_n + \eta]$ . Notons alors  $(p_n)$  définie par  $p_{2n} = x_n - \eta$ ,  $p_{2n+1} = x_n + \eta$ . Soit  $I(x) = \int_0^x f$ . Alors  $I(p_{2n+1}) - I(p_{2n}) = \int_{x_n - \eta}^{x_n + \eta} f(t) dt \geq \frac{\varepsilon}{2} \cdot 2\eta = \varepsilon\eta$ . Donc la suite  $(I(p_n))$  n'est pas de une suite de Cauchy, donc ne converge pas, donc la fonction  $x \mapsto I(x)$  ne converge pas non plus, et donc  $\int_0^\infty f(t) dt$  diverge.



2. Par le changement de variable  $u = t^2$  puis une intégration par partie, on montre que l'intégrale  $\int_0^\infty \sin(t^2) dt$  converge, mais comme  $f(x) = \sin(x^2)$  ne tend pas vers 0 alors  $f$  n'est pas uniformément continue sur  $\mathbb{R}$ .

### Correction de l'exercice 9 ▲

Pour  $x = (x_1, x_2) \in E_1 \times E_2$  on définit  $\|x\| = \max(\|x_1\|, \|x_2\|)$ .

1. Sens  $\Leftarrow$ . Soit  $M > 0$  tel que  $\|B(x)\| \leq M\|x_1\|\|x_2\|$ . Montrons que  $B$  est continue au point  $x = (x_1, x_2)$  fixé. Soit  $y = (y_1, y_2)$  alors

$$B(x+y) - B(x) = B(x_1 + y_1, x_2 + y_2) - B(x_1, x_2) = B(x_1, y_2) + B(x_2, y_1) + B(y_1, y_2).$$

Donc

$$\|B(x+y) - B(x)\| \leq M\|x_1\|\|y_2\| + M\|x_2\|\|y_1\| + M\|y_1\|\|y_2\|.$$

Pour  $\|y_1\| \leq \frac{\varepsilon}{M\|x_1\|}$  on a  $M\|x_1\|\|y_2\| \leq \varepsilon$  (si  $x_1 = 0$  il n'y a rien à choisir ici). Pour  $\|y_2\| \leq \frac{\varepsilon}{M\|x_2\|}$  on a  $M\|x_2\|\|y_1\| \leq \varepsilon$  (si  $x_2 = 0$  il n'y a rien à choisir ici). Enfin pour  $\|y_1\| \leq \sqrt{\frac{\varepsilon}{M}}$  et  $\|y_2\| \leq \sqrt{\frac{\varepsilon}{M}}$  on a  $M\|y_1\|\|y_2\| \leq \varepsilon$ . Donc en prenant  $\eta = \min(\frac{\varepsilon}{M\|x_1\|}, \frac{\varepsilon}{M\|x_2\|}, \sqrt{\frac{\varepsilon}{M}})$ , on obtient que pour  $\|y\| = \max(\|y_1\|, \|y_2\|) \leq \eta$  on a  $\|B(x+y) - B(x)\| \leq 3\varepsilon$ . Ce qui prouve la continuité. Donc  $B$  est continue sur  $E_1 \times E_2$ .

2. Sens  $\Rightarrow$ . Si  $B$  est continue partout, en particulier elle est continue en 0. Je choisis  $\varepsilon = 1$ , il existe  $\eta > 0$  tel que  $\|x\| \leq \eta$  alors  $\|B(x)\| \leq 1$ . Donc pour  $\|x_1\| \leq \eta$  et  $\|x_2\| \leq \eta$  on a  $\|B(x_1, x_2)\| \leq 1$ . Soit maintenant  $y = (y_1, y_2) \in E_1 \times E_2$ , ( $y_1 \neq 0, y_2 \neq 0$ ) on a  $(\eta \frac{y_1}{\|y_1\|}, \eta \frac{y_2}{\|y_2\|})$  de norme  $\leq \eta$  donc  $B(\eta \frac{y_1}{\|y_1\|}, \eta \frac{y_2}{\|y_2\|}) \leq 1$  et par bilinéarité cela fournit :  $B(y_1, y_2) \leq \frac{1}{\eta^2} \|y_1\| \|y_2\|$ , et ce pour tout  $(y_1, y_2)$ . La constante cherchée étant  $\frac{1}{\eta^2}$ .

### Correction de l'exercice 10 ▲

Comme  $L$  est linéaire il suffit de montrer que  $L$  est continue en 0. Supposons que cela ne soit pas vrai, alors il faut nier la continuité de  $L$  en 0 qui s'écrit :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \eta > 0 \quad \forall x \in E \quad (\|x\| < \eta \Rightarrow \|L(x)\| < \varepsilon).$$

La négation s'écrit alors :

$$\exists \varepsilon > 0 \quad \forall \eta > 0 \quad \exists x \in E \quad (\|x\| < \eta \text{ et } \|L(x)\| \geq \varepsilon).$$

Soit donc un tel  $\varepsilon > 0$  de la négation, pour  $\eta$  de la forme  $\eta = \frac{1}{n}$ , on obtient  $y_n$  tel que  $\|y_n\| < \frac{1}{n}$  et  $\|L(y_n)\| \geq \varepsilon$ . On pose  $x_n = \sqrt{n}y_n$ , alors  $\|x_n\| = \sqrt{n}\|y_n\| < \frac{1}{\sqrt{n}}$  donc  $(x_n)$  est une suite de  $E$  qui tend vers 0. Par contre  $\|L(x_n)\| = \sqrt{n}\|L(y_n)\| \geq \varepsilon\sqrt{n}$ , donc la suite  $(L(x_n))$  n'est pas bornée. Par contraposition nous avons obtenu le résultat souhaité.

### Correction de l'exercice 11 ▲

1. Si  $f$  est linéaire et bornée sur la boule unité alors elle est continue (voir le cours ou refaire la démonstration).
2. Il reste à montrer que  $f$  est linéaire : on a déjà  $f(x+y) = f(x) + f(y)$  pour tout  $x, y$  reste donc à prouver  $f(\lambda x) = \lambda f(x)$ . Pour tout  $\lambda \in \mathbb{R}$  et  $x \in E$ .
- Pour  $\lambda \in \mathbb{Z}$ , c'est une récurrence,  $f(2x) = f(x+x) = f(x) + f(x) = 2f(x)$ . Puis  $f(3x) = f(2x+x) = f(2x) + f(x) = 2f(x) + f(x) = 3f(x)$  etc. Donc  $f(nx) = nf(x)$  pour  $n \in \mathbb{N}$ . De plus  $0 = f(0) = f(x + (-x)) = f(x) + f(-x)$  donc  $f(-x) = -f(x)$ . Ensuite on a  $f(-nx) = -nf(x)$  pour  $n \in \mathbb{N}$ . Bilan : pour tout  $\lambda \in \mathbb{Z}$  on a  $f(\lambda x) = \lambda f(x)$ .

- Pour  $\lambda \in \mathbb{Q}$ , soit  $\lambda = \frac{p}{q}$ ,  $p, q \in \mathbb{Z}$ .

$$f\left(\frac{p}{q}x\right) = pf\left(\frac{1}{q}x\right) = \frac{p}{q}qf\left(\frac{x}{q}\right) = \frac{p}{q}f\left(q\frac{x}{q}\right) = \frac{p}{q}f(x).$$

Nous avons utilisé intensivement le premier point.

- Soit  $\lambda \in \mathbb{R}$  alors il existe une suite  $(\lambda_n)$  d'éléments de  $\mathbb{Q}$  qui converge vers  $\lambda$ . Fixons  $x \in E$ .

$$f(\lambda x) - \lambda f(x) = f(\lambda x) - f(\lambda_n x) + f(\lambda_n x) - \lambda f(x) = f((\lambda - \lambda_n)x) + (\lambda_n - \lambda)f(x).$$

Nous avons utilisé le second point. Soit  $\varepsilon \in \mathbb{Q}_+^*$ . Pour  $n$  assez grand on a  $\|(\lambda - \lambda_n)x\| < \varepsilon$ . Donc  $\|\frac{1}{\varepsilon}(\lambda - \lambda_n)x\| \in B(0, 1)$  or  $f$  est bornée sur la boule unité donc il existe  $M > 0$  tel que  $f(\frac{1}{\varepsilon}(\lambda - \lambda_n)x) \leq M$  (quelque soit  $n$ ). Donc  $f(\lambda - \lambda_n)x \leq M\varepsilon$  ( $\varepsilon$  est rationnel donc on peut le "sortir"). De même pour  $n$  assez grand on a  $(\lambda_n - \lambda)f(x) < \varepsilon$ . Maintenant

$$\|f(\lambda x) - \lambda f(x)\| \leq \|f((\lambda - \lambda_n)x)\| + \|(\lambda_n - \lambda)f(x)\| < M\varepsilon + \varepsilon.$$

Donc pour  $x, \lambda$  fixés,  $\|f(\lambda x) - \lambda f(x)\|$  est aussi petit que l'on veut, donc est nul ! D'où  $f(\lambda x) = \lambda f(x)$  pour  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

### Correction de l'exercice 12 ▲

1. Pour tout  $x$ ,  $\|S(x)\| = \|x\|$  donc  $\|S\| = 1$ .
2.  $\|T(f)\|_\infty = \|f \times g\|_\infty \leq \|f\|_\infty \|g\|_\infty$ . Donc pour  $f \neq 0$ ,  $\frac{\|T(f)\|_\infty}{\|f\|_\infty} \leq \|g\|_\infty$ . De plus en  $g$ , on obtient  $\frac{\|T(g)\|_\infty}{\|g\|_\infty} = \frac{\|g^2\|_\infty}{\|g\|_\infty} = \|g\|_\infty$ . Donc  $\|T\| = \|g\|_\infty$ .
3. On a  $|u(f)| \leq \|f\|_\infty \int_0^1 |g(x)| dx$  donc  $\|u\| \leq \int_0^1 |g(x)| dx$ . Si  $g$  ne change pas de signe sur  $[0, 1]$  alors pour  $f$  la fonction constant égale à 1, on obtient  $|u(f)| = \|f\|_\infty \int_0^1 |g(x)| dx$  donc  $\|u\| = \int_0^1 |g(x)| dx$ . Si  $g$  change de signe alors il ne le fait qu'une fois et en  $\frac{1}{2}$ . Soit  $h_n$  la fonction définie par  $h_n(x) = 1$  si  $x \in [0, \frac{1}{2} - \frac{1}{n}]$ ,  $h_n(x) = -1$  si  $x \in [\frac{1}{2} + \frac{1}{n}, 1]$  et  $h_n$  est affine sur  $[\frac{1}{2} - \frac{1}{n}, \frac{1}{2} + \frac{1}{n}]$  et continue sur  $[0, 1]$ . Cette fonction est construite de telle sorte que si  $g$  est positive puis négative alors  $h_n \times g$  est une fonction continue qui converge uniformément vers  $|g|$  :  $\|h_n g - |g|\|_\infty \rightarrow 0$ . Donc  $|u(h_n)| = \int_0^1 h_n \times g$  et par la convergence uniforme alors  $|u(h_n)|$  converge vers  $\int_0^1 |g|$ . Donc  $\|u\| = \int_0^1 |g|$ .
4.  $|u(x)| = |\sum a_n x_n| \leq \|a_n\|_2 \|x_n\|_2$  (c'est Cauchy-Schwartz) donc  $\|u\| \leq \|a_n\|_2$ . Pour la suite  $x = a$  on a égalité d'où  $\|u\| = \|a_n\|_2$ .
5.  $|u(x)| = |\sum a_n x_n| \leq \sum |a_n x_n| \leq \|a\|_\infty \sum |x_n| = \|a\|_\infty \|x_n\|_1$ , donc  $\|u\| \leq \|a\|_\infty$ . Soit  $p$  fixé, soit  $i(p)$  un indice tel que  $|a_{i(p)}| = \max_{j=1, \dots, p} |a_j|$ . On construit une suite  $x^p$  de la manière suivante :  $x^p = (0, 0, \dots, 0, a_{i(p)}, 0, 0, 0, \dots)$  (des zéros partout sauf  $a_{i(p)}$  à la place  $i(p)$ ). Alors  $\|x^p\|_1 = |a_{i(p)}|$  et  $|u(x^p)| = a_{i(p)}^2$ . Donc  $\frac{|u(x^p)|}{\|x^p\|_1} = |a_{i(p)}|$ . Lorsque  $p$  tend vers  $+\infty$ ,  $|a_{i(p)}| \rightarrow \|a\|_\infty$ . Donc  $\|u\| = \|a\|_\infty$ .
6.  $|u(x)| = |\lim x_n| \leq \|x\|_\infty$ , donc  $\|u\| \leq 1$ . Pour  $x = (1, 1, 1, \dots)$  on obtient l'égalité  $\|u\| = 1$ .

### Correction de l'exercice 13 ▲

1. Il suffit de l'écrire...
2. Calculons la norme de  $U$  :  $\|U(P)\| = \sup_k \|\frac{1}{k} a_k\| \leq \sup_k |a_k| \leq \|P\|$ . Donc pour tout  $P$ ,  $\frac{\|U(P)\|}{\|P\|} \leq 1$ . Et pour  $P(x) = x$  on a égalité donc  $\|U\| = 1$ .
3. Pour  $V$ , prenons  $P_k(x) = x^k$ , alors  $\|P_k\| = 1$ , mais  $\|V(P_k)\| = k$ . Donc  $V$  n'est pas bornée sur la boule unité donc  $V$  n'est pas continue.

---

### Correction de l'exercice 14 ▲

---

1.  $A$  injective : Si  $A(x_1, x_2, \dots) = A(y_1, y_2, \dots)$  alors  $(x_1, x_2/2, \dots, x_n/n, \dots) = (y_1, y_2/2, \dots, y_n/n, \dots)$  donc  $x_1 = y_1, x_2 = y_2, \dots, x_n = y_n, \dots$  Donc  $A$  est injective.

$A$  continue :  $\|A(x)\|_\infty = \sup_n \frac{x_n}{n} \leq \sup_n x_n \leq \|x\|_\infty$ . Donc  $\|A\| \leq 1$  donc  $A$  est continue.

Norme de  $A$  : Pour  $x = (1, 0, 0, \dots)$ . On a  $\|x\|_\infty = 1$  et  $\|A(x)\|_\infty = 1$  Donc la norme de  $A$  est exactement 1.

$A$  n'est pas surjective : posons  $y = (1, 1, 1, \dots) \in l^\infty$ . Soit  $x$  une suite telle que  $A(x) = y$  alors  $x = (1, 2, 3, 4, \dots)$ . Mais  $\|x\|_\infty = +\infty$  donc  $x \notin l^\infty$ . En conséquence  $A : l^\infty \rightarrow l^\infty$  n'est pas surjective.

2. L'inverse à gauche de  $A$  est  $B$  définie par

$$B(x_1, x_2, \dots, x_n, \dots) = (x_1, 2x_2, \dots, nx_n, \dots)$$

de sorte que pour  $x \in l^\infty$  on ait  $B \circ A(x) = x$ . Posons la suite  $x^p = (0, 0, \dots, 0, 1, 0, 0, \dots) \in l^\infty$  (des zéros partout et le 1 à la  $p$ -ième place). Alors  $\|x^p\|_\infty = 1$  et  $\|B(x^p)\|_\infty = p$ . Donc  $\frac{\|B(x^p)\|_\infty}{\|x^p\|_\infty} = p$ , donc la norme de  $B$  n'est pas finie et  $B$  n'est pas continue.

---

### Correction de l'exercice 15 ▲

---

1. Si  $L(a) = 0$  alors  $a \in H$  donc  $\text{dist}(a, H) = 0$  donc la relation est vraie. Supposons que  $L(a) \neq 0$ . Alors on a  $X = H + \mathbb{R}.a$ . En effet pour  $x \in X$ , il existe  $\lambda \in \mathbb{R}$  tel que  $L(x) = \lambda L(a)$ . Donc  $L(x - \lambda a) = 0$ . Posons  $h = x - \lambda a$ , alors  $h \in H$  et  $x = h + \lambda a$  est la décomposition suivant  $H + \mathbb{R}.a$ .

Si  $L$  est continue alors  $\|L\|$  est finie.

$$\begin{aligned} \|L\| &= \sup_{x \in X, x \neq 0} \frac{\|L(x)\|}{\|x\|} \\ &= \sup_{h \in H, \lambda \in \mathbb{R}, h + \lambda a \neq 0} \frac{\|L(h + \lambda a)\|}{\|h + \lambda a\|} \\ &= |L(a)| \sup_{h \in H, \lambda \in \mathbb{R}, h + \lambda a \neq 0} \frac{|\lambda|}{\|h + \lambda a\|} \\ &= |L(a)| \sup_{h \in H} \frac{1}{\|h + a\|} \\ &= |L(a)| \frac{1}{\inf_{h \in H} \|h + a\|} \\ &= |L(a)| \frac{1}{\text{dist}(a, H)} \end{aligned}$$

Ce qui était l'égalité demandée.

2. Si  $H$  est fermé alors  $\text{dist}(a, H) > 0$  si  $a \notin H$  (voir les exercices sur les compacts), par l'égalité démontrée ci-dessus on a  $\|L\|$  finie donc  $L$  est continue.

3. Soit  $X = \mathbb{R}[x]$ . Pour  $P(x) = \sum_{k=0}^p a_k x^k$  on pose  $\|P\| = \sup_k |a_k|$ , et  $V(P)(x) = \sum_{k=1}^n k a_k x^k$ . Alors  $\text{Ker} V = \{0\}$  est fermé mais  $V$  n'est pas continue (voir l'exercice 13).

---

**Correction de l'exercice 16 ▲**

Notons  $L : X \rightarrow \mathbb{R}$  l'application linéaire définie par  $L(f) = f(0)$ . Prenons  $f_n$  définie par  $f_n(t) = 2n(1 - nt)$  pour  $t \in [0, \frac{1}{n}]$  et  $f(t) = 0$  si  $t > \frac{1}{n}$ . Alors  $\|f_n\| = 1$  alors que  $L(f_n) = 2n$ . Donc le rapport  $\frac{|L(f_n)|}{\|f_n\|} = 2n$  n'est pas borné, donc  $L$  n'est pas continue. Si  $H = \{f \mid f(0) = 0\}$  alors  $H = \text{Ker} L = L^{-1}(0)$ . Comme  $L$  n'est pas continue alors  $H$  n'est pas fermé (voir l'exercice 15).

---

**Correction de l'exercice 17 ▲**

$N$  est bien une norme. Et on a pour tout  $x$ ,  $(1 + x^2)|f(x)| \leq N(f)$ .

$$|L(f)| = \left| \int_{\mathbb{R}} f \right| \leq \int_{\mathbb{R}} |f| \leq \int_{\mathbb{R}} \frac{N(f)}{1+x^2} dx \leq N(f) \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{1+x^2} = N(f) [\arctan x]_{-\infty}^{+\infty} = N(f)\pi.$$

Donc pour tout  $f$  on a

$$\frac{\int f}{N(f)} \leq \pi.$$

De plus pour  $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$  on obtient l'égalité. Donc la norme  $\|L\|$  de l'application  $L$  est  $\pi$ .

---