



## Méthodes itératives

---

### Exercice 1

---

Soit  $a \in \mathbb{R}$  et  $A = \begin{pmatrix} 1 & a & a \\ a & 1 & a \\ a & a & 1 \end{pmatrix}$

1. Pour qu'elles valeurs de  $a$   $A$  est-elle définie positive ?
2. Pour qu'elles valeurs de  $a$  la méthode de Gauss–Seidel est-elle convergente ?
3. Ecrire la matrice  $J$  de l'itération de Jacobi.
4. Pour qu'elles valeurs de  $a$  la méthode de Jacobi converge-t-elle ?
5. Ecrire la matrice  $\mathcal{L}_1$  de l'itération de Gauss–Seidel. Calculer  $\rho(\mathcal{L}_1)$ .
6. Pour quelles valeurs de  $a$  la méthode de Gauss–Seidel converge-t-elle plus vite que celle de Jacobi ?

[002235]

### Exercice 2

---

Soit  $A$  une matrice hermitienne inversible décomposée en  $A = M - N$  où  $M$  est inversible. Soit  $B = I - M^{-1}A$  la matrice de l'itération :

$$x_{n+1} = Bx_n + c.$$

Supposons que  $M + M^* - A$  soit définie positive.

1. Soit  $x$  un vecteur quelconque et on pose  $y = Bx$ . Montrer l'identité :

$$(x, Ax) - (y, Ay) = ((x - y), (M + M^* - A)(x - y)).$$

2. Supposons que  $A$  est définie positive. Soit  $x \neq 0$  un vecteur propre de  $B$  associé à la valeur propre  $\lambda$ ,  $y = Bx = \lambda x$ . Utiliser l'identité précédente pour montrer que  $|\lambda| < 1$ . Que peut-on conclure sur la convergence de la méthode ?
3. Supposons maintenant que  $\rho(B) < 1$ . montrer que  $A$  est définie positive.
4. Supposons  $A$  décomposée par points ou par blocs sous la forme

$$A = D - E - F \text{ avec } D \text{ définie positive.}$$

Montrer que la méthode de relaxation par points ou par blocs pour  $0 < w < 2$  converge si et seulement si  $A$  est définie positive.

[Correction](#) ▼

[002236]

### Exercice 3

---

Soit  $A = I - E - E^*$  une matrice carrée d'ordre  $N$  où  $E$  est une matrice strictement triangulaire inférieure ( $e_{ij} = 0$  pour  $i \leq j$ ). Pour résoudre le système  $Ax = b$ , on propose la méthode itérative définie par

$$\begin{cases} (I - E)x_{2k+1} &= E^*x_{2k} + b \\ (I - E^*)x_{2k+2} &= Ex_{2k+1} + b \end{cases}$$

1. Déterminer  $B$  et  $c$  pour que l'on ait :

$$x_{2k+2} = Bx_{2k} + c.$$

Vérifier que  $B = M^{-1}N$  et  $A = M - N$  avec  $M = (I - E)(I - E^*)$ ,  $N = EE^*$ .

2. Montrer que  $M^* + N$  est une matrice définie positive. En déduire une condition nécessaire et suffisante pour la convergence de la méthode.

Correction ▼

[002237]

#### Exercice 4

Soient  $A$  et  $B$  deux matrices réelles d'ordre  $N$  et  $a, b$  deux vecteurs de  $\mathbb{R}^n$ . On considère les deux itérations suivantes :

$$\begin{cases} x_{k+1} = By_k + a \\ y_{k+1} = Ax_k + b \end{cases} \quad k = 0, 1, \dots \quad (1)$$

avec  $x_0, y_0 \in \mathbb{R}^n$  donnés.

- Déterminer une condition nécessaire et suffisante de convergence des deux suites de vecteurs.
- Soit  $z_k = (x_k, y_k)^T \in \mathbb{R}^{2n}$ . Montrer que (1) peut s'écrire

$$z_{k+1} = Cz_k + c$$

où  $C$  est une matrice d'ordre  $2n$ . Expliciter  $C$  et  $c$ .

- Montrer que  $\rho^2(C) = \rho(AB)$ .
- On considère maintenant les deux itérations suivantes :

$$\begin{cases} x_{k+1} = By_k + a \\ y_{k+1} = Ax_{k+1} + b \end{cases} \quad k = 0, 1, \dots \quad (2)$$

Donner une condition nécessaire et suffisante de convergence.

Montrer que (2) est équivalent à

$$z_{k+1} = Dz_k + d$$

où  $D$  est une matrice d'ordre  $2N$ .

Montrer que  $\rho(D) = \rho(AB)$ .

#### 5. Taux de convergence

On appelle taux de convergence asymptotique de la matrice itérative  $M$  le nombre

$$R(M) = -\ln(\rho(M)).$$

On pose  $e^k = x^k - x^*$  l'erreur de l'itéré d'ordre  $k$ .

- (a) Montrer que le nombre d'itérations  $k$  pour réduire l'erreur d'un facteur  $\varepsilon$ , i.e.,  $\frac{\|e^k\|}{\|e^0\|} \leq \varepsilon$  vérifie

$$k \geq \frac{-\ln \varepsilon}{R(M)}.$$

- (b) Comparer le taux de convergence des algorithmes (1) et (2).

Correction ▼

[002238]

#### Exercice 5

On considère le système  $Ax = b$  avec

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad (3)$$

- Décomposer  $A$  sous la forme  $LU$  et en déduire que (3) admet une solution unique  $x^*$ .
- Ecrire l'itération de Gauss-Seidel pour ce système, c'est-à-dire, le système linéaire donnant  $X_{n+1} = (x_{n+1}, y_{n+1}, z_{n+1}, t_{n+1}, u_{n+1})$  en fonction de  $X_n = (x_n, y_n, z_n, t_n, u_n)$ .

3. Pour tout  $n \in \mathbb{N}$  on pose  $e_n = X_n - x^*$ . Montrer qu'il existe  $a \in [0, 1[$  tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \|e_{n+1}\|_\infty \leq a \|e_n\|_\infty.$$

En déduire la convergence de la suite.

4. Déterminer la matrice de Gauss–Seidel  $\mathcal{L}_1$  associée à  $A$ . Calculer  $\|\mathcal{L}_1\|_\infty$ . En déduire la convergence de  $(X_n)$  vers  $x^*$ .

5. Soit  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  vérifiant la propriété suivante :

$$\begin{aligned} |a_{ij}| &\geq \sum_{j \neq i} |a_{ij}| \quad i = 2, \dots, n \\ |a_{11}| &> \sum_{j \neq 1} |a_{1j}| \end{aligned}$$

et sur chaque ligne de  $A$  il existe un terme non nul  $a_{ij}$  pour  $i \geq 2$  et  $j < i$ .

Montrer qu'alors la méthode de Gauss–Seidel converge.

## Correction de l'exercice 2 ▲

---

1. Pour le membre de gauche on obtient

$$(x, Ax) - (y, Ay) = (x, AM^{-1}Mx) + (M^{-1}Ax, Ax) - (M^{-1}Ax, AM^{-1}Ax)$$

Pour le membre de droite on obtient  $y = Bx = x - M^{-1}Ax \Rightarrow x - y = M^{-1}Ax$  et donc

$$(x - y, (M + M^* - A)(x - y)) = (M^{-1}Ax, (M + M^* - A)M^{-1}Ax) = \\ (M^{-1}Ax, Ax) + (M^{-1}Ax, M^*M^{-1}Ax) - (M^{-1}Ax, AM^{-1}Ax)$$

Mais

$$(M^{-1}Ax, M^*M^{-1}Ax) = (x, (M^{-1}A)^*M^*M^{-1}Ax) = (x, AM^{-1}Ax)$$

ce qui fini la démonstration.

2.  $y = Bx = \lambda x \Rightarrow x - y = (1 - \lambda)x$ . En utilisant l'égalité précédente

$$(x, Ax) - (y, Ay) = (x, Ax) - (\lambda x, A(\lambda x)) = (1 - |\lambda|^2)(x, Ax)$$

$$(x - y, (M + M^* - A)(x - y)) = ((1 - \lambda)x, (M + M^* - A)((1 - \lambda)x)) = |1 - \lambda|^2(x, (M + M^* - A)x)$$

et donc

$$(1 - |\lambda|^2)(x, Ax) = |1 - \lambda|^2(x, (M + M^* - A)x)$$

$\lambda$  ne peut pas être = 1 car sinon  $y = Bx = x \Leftrightarrow x - M^{-1}Ax = x \Leftrightarrow M^{-1}Ax = 0 \Leftrightarrow x = 0$ . Donc  $\lambda \neq 1$ ,  $M + M^* - A$  définie positive,  $|1 - \lambda|^2 > 0$ ,  $A$  définie positive impliquent que  $1 - |\lambda|^2 > 0 \Leftrightarrow |\lambda| < 1$ . Donc  $\rho(B) < 1$  et la méthode itérative converge.

3. Démonstration par absurde. Supposons que ce n'est pas vrai :  $\exists x_0 \neq 0 \quad \alpha_0 = (x_0, Ax_0) \leq 0$ . Alors la suite  $x_n = Bx_{n-1} = B^n x_0$  tend vers 0 et  $\lim \alpha_n = \lim(x_n, Ax_n) = 0$

On utilise maintenant la relation de la question 1 avec  $x = x_{n-1}$  et  $y = Bx_{n-1} = x_n$  et on obtient

$$\alpha_{n-1} - \alpha_n = (x_{n-1} - x_n, (M + M^* - A)(x_{n-1} - x_n)) > 0$$

si  $x_{n-1} - x_n \neq 0$  (ce qui est vrai car sinon  $x_{n-1} = x_n = Bx_{n-1}$  et  $B$  a une valeur propre = 1)

Donc  $(\alpha_{n-1} - \alpha_n)$  est une suite strictement décroissante convergeant vers 0 avec  $\alpha_0 < 0$ . Ceci est impossible et donc  $A$  est définie positive

4. Soit  $A = D - E - F$  la décomposition usuelle de  $A$ . Comme  $A$  est hermitienne,  $D = D^*$  et  $F = E^*$ . Pour la méthode de relaxation on a  $M = D/w - E$  et donc

$$M^* + M - A = D/w - F + D/w - E - D + E + F = \frac{2-w}{w}D$$

qui est hermitienne. Pour  $0 < w < 2$ ,  $M^* + M - A$  est définie positive, alors des deux questions précédentes on conclut que la méthode converge ssi  $A$  est définie positive.

---

## Correction de l'exercice 3 ▲

---

1. On a  $x_{2k+1} = (I - E)^{-1}E^*x_{2k} + (I - E)^{-1}b$  et donc

$$x_{2k+2} = (I - E^*)^{-1}E(I - E)^{-1}E^*x_{2k} + (I - E^*)^{-1}E(I - E)^{-1}b + (I - E^*)^{-1}b$$

Mais  $E(I - E)^{-1} = (I - E)^{-1}E$  et alors

$$x_{2k+2} = (I - E^*)^{-1}(I - E)^{-1}EE^*x_{2k} + (I - E^*)^{-1}(I - E)^{-1}(E + I - E)b = M^{-1}Nx_{2k} + M^{-1}b$$

avec

$$M = (I - E)(I - E^*), \quad N = EE^*, \quad M - N = I - E - E^* = A$$

2.  $M^* + N = I - E - E^* + 2EE^*$  et donc

$v^*(M^* + N)v = \|v\|_2^2 - v^*Ev - v^*E^*v + 2v^*EE^*v = \|E^*v\|_2^2 + (\|v\|_2^2 + \|E^*v\|_2^2 - 2\operatorname{Re}(v, E^*v))$  On a l'inégalité

$$-2\|v\|\|E^*v\| \leq -2|(v, E^*v)| \leq -2|\operatorname{Re}(v, E^*v)|$$

et donc

$$(\|v\|_2 - \|E^*v\|_2)^2 \leq \|v\|_2^2 + \|E^*v\|_2^2 - 2\operatorname{Re}(v, E^*v) \Rightarrow$$

$v^*(M^* + N)v \geq \|E^*v\|_2^2 + (\|v\|_2 - \|E^*v\|_2)^2$  implique que

$$v^*(M^* + N)v = 0 \Leftrightarrow \|E^*v\|_2 = 0 \text{ et } \|v\|_2 = \|E^*v\|_2 \Leftrightarrow \|v\|_2 = 0$$

Donc  $M^* + N$  est définie positive et en appliquant un résultat d'un exercice précédent on conclut que la méthode converge ssi  $A$  est définie positive.

### Correction de l'exercice 4 ▲

1. C'est facile à voir que si  $(x_k)$  converge vers  $x^*$  et  $(y_k)$  converge vers  $y^*$ , alors  $x^*$  et  $y^*$  sont solution des systèmes  $(I - BA)x^* = Bb + a$  et  $(I - AB)y^* = Aa + b$ . On a :

$$\begin{cases} x_{k+1} = B(Ax_{k-1} + b) + a = BAx_{k-1} + Bb + a \\ y_{k+1} = A(By_{k-1} + a) + b = AB y_{k-1} + Aa + b \end{cases}$$

et donc  $(x_k)$  converge ssi  $\rho(BA) < 1$  et  $(y_k)$  converge ssi  $\rho(AB) < 1$ .

2.  $z_{k+1} = Cz_k + c$  avec  $C = \begin{pmatrix} 0 & B \\ A & 0 \end{pmatrix}$ ,  $c = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$

3. Soit  $\lambda$  valeur propre non nulle de  $C$  et  $z = (x, y)^T$  vecteur propre associé

$$Cz = \lambda z \Leftrightarrow \begin{cases} By = \lambda x \\ Ax = \lambda y \end{cases} \Rightarrow AB y = \lambda Ax = \lambda^2 y \Rightarrow$$

$\lambda^2$  est valeur propre de  $AB$ .

Soit maintenant  $\alpha$  valeur propre de  $AB \Leftrightarrow \exists u \neq 0 : ABu = \alpha u$ . On pose  $\beta^2 = \alpha$  et  $x = Bu$ ,  $y = \beta u$

$$C \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta Bu \\ ABu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta Bu \\ \beta^2 u \end{pmatrix} = \beta \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

et donc  $\rho^2(C) = \rho(AB)$

4.  $D = \begin{pmatrix} 0 & B \\ 0 & AB \end{pmatrix}$ ,  $d = \begin{pmatrix} a \\ Aa + b \end{pmatrix}$ . La démonstration de  $\rho(D) = \rho(AB)$  se fait comme dans la question précédente.

5. (a)  $e^k = M^k e^0 \Rightarrow \frac{\|e^k\|}{\|e^0\|} \leq \|M^k\| \leq \varepsilon$ . Il suffit donc d'avoir  $\|M^k\|^{1/k} \leq \varepsilon^{1/k} \Rightarrow \log(\|M^k\|^{1/k}) \leq \frac{1}{k} \log \varepsilon$   
c'est-à-dire  $k \geq \frac{\log \varepsilon}{\log(\|M^k\|^{1/k})}$  Mais comme  $\rho(M) \leq \|M^k\|^{1/k}$  on obtient finalement

$$k \geq -\log \varepsilon / R(M)$$

(b) nous avons  $\rho^2(C) = \rho(AB) \Rightarrow \rho(C) = \sqrt{\rho(AB)}$  et  $\rho(D) = \rho(AB)$ . Donc  $\rho(D) < \rho(C) \Rightarrow R(D) > R(C)$ . Donc on atteint la même réduction d'erreur avec un plus petit nombre d'itérations de la méthode 2)

### Correction de l'exercice 5 ▲

1.

2. Itération de Gauss-Seidel :  $(D - E)X_{n+1} = FX_n + b$  avec

$$D - E = \begin{pmatrix} 3 & & & & \\ 1 & 2 & & & \\ 0 & 2 & 3 & & \\ 0 & 0 & 1 & 4 & \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, -F = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & \\ & 0 & 1 & & \\ & & 0 & 1 & \\ & & & 0 & 3 \\ & & & & 0 \end{pmatrix}$$

3.  $e_n = X_n - X^*$ ,  $X_{n+1} = (D - E)^{-1}FX_n + (D - E)^{-1}b$ ,  $X^* = (D - E)^{-1}FX^* + (D - E)^{-1}b \Rightarrow e_{n+1} = (D - E)^{-1}Fe_n$

On obtient alors  $(D - E)e_{n+1} = (D - E)^{-1}Fe_n$  et si on écrit composante à composante on obtient

$$3e_{n+1}^1 = -e_n^2 \Rightarrow |e_{n+1}^1| \leq \frac{1}{3}\|e_n\|_\infty$$

$$e_{n+1}^1 + 2e_{n+1}^2 = -e_n^3 \Rightarrow |e_{n+1}^2| \leq \frac{1}{6}\|e_n\|_\infty + \frac{1}{2}\|e_n\|_\infty = \frac{2}{3}\|e_n\|_\infty$$

$$2e_{n+1}^2 + 3e_{n+1}^3 = -e_n^4 \Rightarrow |e_{n+1}^3| \leq \frac{2}{3}\|e_n\|_\infty + \frac{1}{3}\|e_n\|_\infty = \frac{7}{9}\|e_n\|_\infty$$

$$e_{n+1}^3 + 32e_{n+1}^4 = -3e_n^5 \Rightarrow |e_{n+1}^4| \leq \frac{1}{4}\|e_n\|_\infty + \frac{3}{4}\|e_n\|_\infty = \frac{34}{16}\|e_n\|_\infty$$

$$e_{n+1}^4 + e_{n+1}^5 = 0 \Rightarrow |e_{n+1}^5| \leq \frac{17}{18}\|e_n\|_\infty$$

et donc

$$\|e_n\|_\infty \leq \frac{17}{18}\|e_n\|_\infty$$

4.

$$(D - E)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{6} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{9} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{36} & \frac{1}{12} & -\frac{1}{12} & \frac{1}{4} & 0 \\ \frac{1}{36} & -\frac{1}{12} & \frac{1}{12} & -\frac{1}{4} & 1 \end{pmatrix},$$

$$L_1 = (D - E)^{-1}F = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{6} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{9} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{36} & \frac{1}{12} & -\frac{1}{12} & \frac{3}{4} \\ 0 & \frac{1}{36} & -\frac{1}{12} & \frac{1}{12} & -\frac{3}{4} \end{pmatrix}$$

et donc  $\|L_1\|_\infty = \max(\frac{1}{3}, \frac{4}{6}, \frac{17}{18}, \frac{32}{36}, \frac{32}{36}) = \frac{17}{18}$ .

On en déduit donc la convergence de  $(X_n)$  vers  $X^*$ .