Enoncés et corrections : Ana Matos.

Méthodes itératives

Exercice 1

Soit $a \in \mathbb{R}$ et $A = \begin{pmatrix} 1 & a & a \\ a & 1 & a \\ a & a & 1 \end{pmatrix}$

1. Pour qu'elles valeurs de a A est–elle définie positive?
2. Pour qu'elles valeurs de a la méthode de Gauss–Seidel est–elle convergente?
3. Ecrire la matrice J de l'itération de Jacobi.
4. Pour qu'elles valeurs de a la méthode de Jacobi converge–t–elle?
5. Ecrire la matrice $\mathscr{L}_1$ de l'itération de Gauss–Seidel. Calculer $\rho(\mathscr{L}_1)$.
6. Pour quelles valeurs de a la méthode de Gauss–Seidel converge–t–elle plus vite que celle de Jacobi?

[002235]

Exercice 2

Soit A une matrice hermitienne inversible décomposée en $A = M - N$ où M est inversible. Soit $B = I - M^{-1}A$ la matrice de l'itération:

$$x_{n+1} = Bx_n + c.$$

Supposons que $M + M^* - A$ soit définie positive.

1. Soit x un vecteur quelconque et on pose $y = Bx$. Montrer l'identité:

$$(x, Ax) - (y, Ay) = ((x - y), (M + M^* - A)(x - y)).$$

2. Supposons que A est définie positive. Soit $x \neq 0$ un vecteur propre de B associé à la valeur propre λ, $y = Bx = \lambda x$. Utiliser l'identité précédente pour montrer que $|\lambda| < 1$. Que peut–on conclure sur la convergence de la méthode?
3. Supposons maintenant que $\rho(B) < 1$. montrer que A est définie positive.
4. Supposons A décomposée par points ou par blocs sous la forme

$$A = D - E - F \text{ avec } D \text{ définie positive.}$$

Montrer que la méthode de relaxation par points ou par blocs pour $0 < w < 2$ converge si et seulement si A est définie positive.

Correction ▼ [002236]

Exercice 3

Soit $A = I - E - E^*$ une matrice carrée d'ordre N où E est une matrice strictement triangulaire inférieure ($e_{ij} = 0$ pour $i \leqslant j$). Pour résoudre le système $Ax = b$, on propose la méthode itérative définie par

$$\begin{cases} (I - E)x_{2k+1} &= E^* x_{2k} + b \\ (I - E^*)x_{2k+2} &= Ex_{2k+1} + b \end{cases}$$

1. Déterminer B et c pour que l'on ait:
$$x_{2k+2} = Bx_{2k} + c.$$
Vérifier que $B = M^{-1}N$ et $A = M - N$ avec $M = (I-E)(I-E^*)$, $N = EE^*$.

2. Montrer que $M^* + N$ est une matrice définie positive. En déduire une condition nécessaire et suffisante pour la convergence de la méthode.

Correction ▼ [002237]

Exercice 4

Soient A et B deux matrices réelles d'ordre N et a, b deux vecteurs de $\mathbb{R}^n$. On considère les deux itérations suivantes:
$$\left\{ \begin{array}{lcl} x_{k+1} & = & By_k + a \\ y_{k+1} & = & Ax_k + b \end{array} \right. \quad k = 0, 1, \cdots \tag{1}$$
avec $x_0, y_0 \in \mathbb{R}^n$ donnés.

1. Déterminer une condition nécessaire et suffisante de convergence des deux suites de vecteurs.

2. Soit $z_k = (x_k, y_k)^T \in \mathbb{R}^{2n}$. Montrer que (1) peut s'écrire
$$z_{k+1} = Cz_k + c$$
où C est une matrice d'ordre $2n$. Expliciter C et c.

3. Montrer que $\rho^2(C) = \rho(AB)$.

4. On considère maintenant les deux itérations suivantes:
$$\left\{ \begin{array}{lcl} x_{k+1} & = & By_k + a \\ y_{k+1} & = & Ax_{k+1} + b \end{array} \right. \quad k = 0, 1, \cdots \tag{2}$$
Donner une condition nécessaire et suffisante de convergence.
Montrer que (2) est équivalent à
$$z_{k+1} = Dz_k + d$$
où D est une matrice d'ordre $2N$.
Montrer que $\rho(D) = \rho(AB)$.

5. **Taux de convergence**
On appelle taux de convergence asymptotique de la matrice itérative M le nombre
$$R(M) = -\ln(\rho(M)).$$
On pose $e^k = x^k - x^*$ l'erreur de l'itéré d'ordre k.
   (a) Montrer que le nombre d'itérations k pour réduire l'erreur d'un facteur ε , i.e., $\frac{\|e^k\|}{\|e^0\|} \leqslant \varepsilon$ vérifie
$$k \geqslant \frac{-\ln \varepsilon}{R(M)}.$$
   (b) Comparer le taux de convergence des algorithmes (1) et (2).

Correction ▼ [002238]

Exercice 5

On considère le système $Ax = b$ avec
$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \tag{3}$$

1. Décomposer A sous la forme LU et en déduire que (3) admet une solution unique x^*.

2. Ecrire l'itération de Gauss–Seidel pour ce système, c'est–à–dire, le système linéaire donnant $X_{n+1} = (x_{n+1}, y_{n+1}, z_{n+1}, t_{n+1}, u_{n+1})$ en fonction de $X_n = (x_n, y_n, z_n, t_n, u_n)$.

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on pose $e_n = X_n - x^*$. Montrer qu'il existe $a \in [0,1[$ tel que:

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \|e_{n+1}\|_\infty \leqslant a\|e_n\|_\infty.$$

   En déduire la convergence de la suite.

4. Déterminer la matrice de Gauss–Seidel $\mathscr{L}_1$ associée à A. Calculer $\|\mathscr{L}_1\|_\infty$. En déduire la convergence de (X_n) vers x^*.

5. Soit $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ vérifiant la propriété suivante:

$$\begin{array}{rcl} |a_{ij}| & \geqslant & \sum_{j\neq i} |a_{ij}| \quad i = 2, \cdots, n \\ |a_{11}| & > & \sum_{j\neq 1} |a_{1j}| \end{array}$$

   et sur chaque ligne de A il existe il existe un terme non nul a_{ij} pour $i \geqslant 2$ et $j < i$.

   Montrer qu'alors la méthode de Gauss–Seidel converge.

Correction ▼ [002239]

Correction de l'exercice 2 ▲

1. Pour le membre de gauche on obtient

$$(x,Ax)-(y,Ay)=(x,AM^{-1}Mx)+(M^{-1}Ax,Ax)-(M^{-1}Ax,AM^{-1}Ax)$$

Pour le membre de droite on obtient $y=Bx=x-M^{-1}Ax \Rightarrow x-y=M^{-1}Ax$ et donc

$$(x-y,(M+M^*-A)(x-y))=(M^{-1}Ax,(M+M^*-A)M^{-1}Ax)=$$

$$(M^{-1}Ax,Ax)+(M^{-1}Ax,M^*M^{-1}Ax)-(M^{-1}Ax,AM^{-1}Ax)$$

Mais

$$(M^{-1}Ax,M^*M^{-1}Ax)=(x,(M^{-1}A)^*M^*M^{-1}Ax)=(x,AM^{-1}Ax)$$

ce qui fini la démonstration.

2. $y=Bx=\lambda x \Rightarrow x-y=(1-\lambda)x$. En utilisant l'égalité précédente
$(x,Ax)-(y,Ay)=(x,Ax)-(\lambda x,A(\lambda x))=(1-|\lambda|^2)(x,Ax)$
$(x-y,(M+M^*-A)(x-y))=((1-\lambda)x,(M+M^*-A)((1-\lambda)x))=|1-\lambda|^2(x,(M+M^*-A)x)$
et donc

$$(1-|\lambda|^2)(x,Ax)=|1-\lambda|^2(x,(M+M^*-A)x)$$

λ ne peut pas être $=1$ car sinon $y=Bx=x \Leftrightarrow x-M^{-1}Ax=x \Leftrightarrow M^{-1}Ax=0 \Leftrightarrow x=0$. Donc $\lambda\neq 1$, $M+M^*-A$ définie positive, $|1-\lambda|^2>0$, A définie positive impliquent que $1-|\lambda|^2>0 \Leftrightarrow |\lambda|<1$. Donc $\rho(B)<1$ et la méthode itérative converge.

3. Démonstration par absurde. Supposons que ce n'est pas vrai: $\exists x_0\neq 0 \quad \alpha_0=(x_0,Ax_0)\leqslant 0$. Alors la suite $x_n=Bx_{n-1}=B^nx_0$ tend vers 0 et $\lim\alpha_n=\lim(x_n,Ax_n)=0$
On utilise maintenant la relation de la question 1 avec $x=x_{n-1}$ et $y=Bx_{n-1}=x_n$ et on obtient

$$\alpha_{n-1}-\alpha_n=(x_{n-1}-x_n,(M+M^*-A)(x_{n-1}-x_n)>0$$

si $x_{n-1}-x_n\neq 0$ (ce qui est vrai car sinon $x_{n-1}=x_n=Bx_{n-1}$ et B a une valeur propre $=1$)
Donc $(\alpha_{n-1}-\alpha_n)$ est une suite strictement décroissante convergeant vers 0 avec $\alpha_0<0$. Ceci est impossible et donc A est définie positive

4. Soit $A=D-E-F$ la décomposition usuelle de A. Comme A est hermitienne, $D=D^*$ et $F=E^*$. Pour la méthode de relaxation on a $M=D/w-E$ et donc

$$M^*+M-A=D/w-F+D/w-E-D+E+F=\frac{2-w}{w}D$$

qui est hermitienne. Pour $0<w<2$, M^*+M-A est définie positive, alors des deux questions précédentes on conclut que la méthode converge ssi A est définie positive.

Correction de l'exercice 3 ▲

1. On a $x_{2k+1}=(I-E)^{-1}E^*x_{2k}+(I-E)^{-1}b$ et donc

$$x_{2k+2}=(I-E^*)^{-1}E(I-E)^{-1}E^*x_{2k}+(I-E^*)^{-1}E(I-E)^{-1}b+(I-E^*)^{-1}b$$

Mais $E(I-E)^{-1}=(I-E)^{-1}E$ et alors

$$x_{2k+2}=(I-E^*)^{-1}(I-E)^{-1}EE^*x_{2k}+(I-E^*)^{-1}(I-E)^{-1}(E+I-E)b=M^{-1}Nx_{2k}+M^{-1}b$$

avec

$$M=(I-E)(I-E^*),\quad N=EE^*,\quad M-N=I-E-E^*=A$$

2. $M^*+N = I-E-E^*+2EE^*$ et donc
$v^*(M^*+N)v = \|v\|_2^2 - v^*Ev - v^*E^*v + 2v^*EE^*v = \|E^*v\|_2^2 + (\|v\|_2^2 + \|E^*v\|_2^2 - 2\mathrm{Re}(v,E^*v))$ On a l'inégalité

$$-2\|v\|\|E^*v\| \leqslant -2|(v,E^*v)| \leqslant -2|\mathrm{Re}(v,E^*v)|$$

et donc

$$(\|v\|_2 - \|E^*v\|_2)^2 \leqslant \|v\|_2^2 + \|E^*v\|_2^2 - 2\mathrm{Re}(v,E^*v) \Rightarrow$$

$v^*(M^*+N)v \geqslant \|E^*v\|_2^2 + (\|v\| - \|E^*v\|_2)^2$ implique que

$$v^*(M^*+N)b = 0 \Leftrightarrow \|E^*v\|_2 = 0 \text{ et } \|v\|_2 = \|E^*v\|_2 \Leftrightarrow \|v\|_2 = 0$$

Donc M^*+N est définie positive et en appliquant un résultat d'un exercice précédent on conclut que la méthode converge ssi A est définie positive.

Correction de l'exercice 4 ▲

1. C'est facile à voir que si (x_k) converge vers x^* et (y_k) converge vers y^*, alors x^* et y^* sont solution des systèmes $(I-BA)x^* = Bb+a$ et $(I-AB)y^* = Aa+b$. On a:

$$\begin{cases} x_{k+1} = B(Ax_{k-1}+b)+a = BAx_{k-1}+Bb+a \\ y_{k+1} = A(By_{k-1}+a)+b = ABy_{k-1}+Aa+b \end{cases}$$

et donc (x_k) converge ssi $\rho(BA) < 1$ et (y_k) converge ssi $\rho(AB) < 1$.

2. $z_{k+1} = Cz_k + c$ avec $C = \begin{pmatrix} 0 & B \\ A & 0 \end{pmatrix}, c = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$

3. Soit λ valeur propre non nulle de C et $z = (x,y)^T$ vecteur propre associé

$$Cz = \lambda z \Leftrightarrow \begin{cases} By = \lambda x \\ Ax = \lambda y \end{cases} \Rightarrow ABy = \lambda Ax = \lambda^2 y \Rightarrow$$

λ^2 est valeur propre de AB.
Soit maintenant α valeur propre de $AB \Leftrightarrow \exists u \neq 0 : \quad ABu = \alpha u$. On pose $\beta^2 = \alpha$ et $x = Bu$, $y = \beta u$

$$C\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta Bu \\ ABu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta Bu \\ \beta^2 u \end{pmatrix} = \beta \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

et donc $\rho^2(C) = \rho(AB)$

4. $D = \begin{pmatrix} 0 & B \\ 0 & AB \end{pmatrix}, \quad d = \begin{pmatrix} a \\ Aa+b \end{pmatrix}$. La démonstration de $\rho(D) = \rho(AB)$ se fait comme dans la question précédente.

5. (a) $e^k = M^k e^0 \Rightarrow \frac{\|e^k\|}{\|e^0\|} \leqslant \|M^k\| \leqslant \varepsilon$. Il suffit donc d'avoir $\|M^k\|^{1/k} \leqslant \varepsilon^{1/k} \Rightarrow \log(\|M^k\|^{1/k}) \leqslant \frac{1}{k}\log\varepsilon$ c'est- à dire $k \geqslant \frac{\log\varepsilon}{\log(\|M^k\|^{1/k})}$ Mais comme $\rho(M) \leqslant \|M^k\|^{1/k}$ on obtient finalement

$$k \geqslant -\log\varepsilon / R(M)$$

   (b) nous avons $\rho^2(C) = \rho(AB) \Rightarrow \rho(C) = \sqrt{\rho(AB)}$ et $\rho(D) = \rho(AB)$. Donc $\rho(D) < \rho(C) \Rightarrow R(D) > R(C)$. Donc on atteint la même réduction d'erreur avec un plus petit nombre d'itérations de la méthode 2)

Correction de l'exercice 5 ▲

1.

2. Itération de Gauss-Seidel : $(D-E)X_{n+1} = FX_n + b$ avec

$$D-E = \begin{pmatrix} 3 & & & & \\ 1 & 2 & & & \\ 0 & 2 & 3 & & \\ 0 & 0 & 1 & 4 & \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, -F = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & \\ & 0 & 1 & & \\ & & 0 & 1 & \\ & & & 0 & 3 \\ & & & & 0 \end{pmatrix}$$

3. $e_n = X_n - X^*$, $\quad ,X_{n+1} = (D-E)^{-1}FX_n + (D-E)^{-1}b$, $\quad X^* = (D-E)^{-1}FX^* + (D-E)^{-1}b \Rightarrow e_{n+1} = (D-E)^{-1}Fe_n$

   On obtient alors $(D-E)e_{n+1} = (D-E)^{-1}Fe_n$ et si on écrit composante à composante on obtient

   $3e^1_{n+1} = -e^2_n \Rightarrow |e^1_{n+1}| \leqslant \frac{1}{3}\|e_n\|_\infty$

   $e^1_{n+1} + 2e^2_{n+1} = -e^3_n \Rightarrow |e^2_{n+1}| \leqslant \frac{1}{6}\|e_n\|_\infty + \frac{1}{2}\|e_n\|_\infty = \frac{2}{3}\|e_n\|_\infty$

   $2e^2_{n+1} + 3e^3_{n+1} = -e^4_n \Rightarrow |e^3_{n+1}| \leqslant \frac{2}{3}\frac{2}{3}\|e_n\|_\infty + \frac{1}{3}\|e_n\|_\infty = \frac{7}{9}\|e_n\|_\infty$

   $e_{n+1}32 + 4e^4_{n+1} = -3e^5_n \Rightarrow |e^4_{n+1}| \leqslant \frac{1}{4}\frac{7}{9}\|e_n\|_\infty + \frac{3}{4}\|e_n\|_\infty = \frac{34}{16}\|e_n\|_\infty$

   $e^4_{n+1} + e^5_{n+1} = 0 \Rightarrow |e^5_{n+1}| \leqslant \frac{17}{18}\|e_n\|_\infty$

   et donc

$$\|e_n\|_\infty \leqslant \frac{17}{18}\|e_n\|_\infty$$

4.

$$(D-E)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{6} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{9} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{36} & \frac{1}{12} & -\frac{1}{12} & \frac{1}{4} & 0 \\ \frac{1}{36} & -\frac{1}{12} & \frac{1}{12} & -\frac{1}{4} & 1 \end{pmatrix},$$

$$L_1 = (D-E)^{-1}F = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{6} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{9} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{36} & \frac{1}{12} & -\frac{1}{12} & \frac{3}{4} \\ 0 & \frac{1}{36} & -\frac{1}{12} & \frac{1}{12} & -\frac{3}{4} \end{pmatrix}$$

   et donc $\|L_1\|_\infty = \max(\frac{1}{3}, \frac{4}{6}, \frac{17}{18}, \frac{32}{36}, \frac{32}{36}) = \frac{17}{18}$.

   On en déduit donc la convergence de (X_n) vers X^*.