



Décomposition en valeurs singulières. Conditionnement

Exercice 1

Soit $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ de rang $r \leq p = \min(m, n)$. On considère la décomposition en valeurs singulières de A

$$U^T A V = \text{diag}(\sigma_1, \dots, \sigma_p)$$

où les σ_i sont les valeurs singulières de A

1. Montrer que $\text{Im}(A) = \text{span}\{u^1, u^2, \dots, u^r\}$ et $\text{Ker}(A) = \text{span}\{v^{r+1}, \dots, v^n\}$.
2. Montrer que $\text{Im}(A^T) = \text{span}\{v^1, u^2, \dots, v^r\}$ et $\text{Ker}(A^T) = \text{span}\{u^{r+1}, \dots, u^m\}$.
3. Déterminer les matrices des projections orthogonales sur $\text{Im}(A)$, $\text{Ker}(A)$, $\text{Im}(A^T)$, $\text{Ker}(A^T)$ à l'aide de U et V .
4. *Application* : calculer la décomposition en valeurs singulières de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

et les matrices correspondantes aux projections orthogonales de l'exercice précédent.

[Correction ▼](#)

[002216]

Exercice 2 Pseudo-inverse d'une matrice

Définition : Soit Σ une matrice diagonale de type $(m \times n)$:

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \mu_1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & \mu_r & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \\ & & & & & & \circ \end{pmatrix}$$

On appelle pseudo-inverse de Σ la matrice Σ^\dagger de type $(n \times m)$ définie par

$$\Sigma^\dagger = \begin{pmatrix} \mu_1^{-1} & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & \mu_r^{-1} \\ & & & & & & \circ \end{pmatrix}$$

Soit A une matrice de type $(m \times n)$ dont la décomposition en valeurs singulières est $A = U \Sigma V^*$.

On appelle *pseudo-inverse* de la matrice A la matrice A^\dagger de type $(n \times m)$ définie par

$$A^\dagger = V \Sigma^\dagger U^*.$$

1. Quelle application représente la restriction de $\Sigma^\dagger \Sigma$ au sous-espace $\text{span}\{e_1, \dots, e_r\}$?
2. Montrer que si A est carrée régulière alors $A^\dagger = A^{-1}$.

3. Montrer que

$$A^\dagger = \sum_{i=1}^r \frac{1}{\mu_i} v_i u_i^*.$$

4. Montrer que

- AA^\dagger est la matrice de la projection orthogonale sur $\text{Im}(A)$;
- $A^\dagger A$ est la matrice de la projection orthogonale sur $\text{Im}(A^*)$

5. Montrer que la restriction à $\text{Im}(A^*) = \text{Ker}(A)^\perp$ de A^*A est une matrice inversible et

$$(A^*A)^{-1} = \sum_{i=1}^r \mu_i^{-2} v_i v_i^*.$$

[Correction ▼](#)

[002217]

Exercice 3

Montrer que, pour $A \in \mathbb{C}^{n \times m}$

1. $\|A\|_2 = \sigma_1$, la plus grande valeur singulière de A
2. $\|A\|_F = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \dots + \sigma_r^2}$ où les σ_i sont les valeurs singulières de A .
3. Les valeurs singulières non nulles de A sont les racines carrées des valeurs propres non nulles de A^*A et AA^* .
4. pour $A \in \mathbb{C}^{m \times m}$, $|\det(A)| = \prod_{i=1}^m \sigma_i$.
5. Si $A = A^*$ alors les valeurs singulières de A sont les valeurs absolues des valeurs propres de A

[Correction ▼](#)

[002218]

Exercice 4

Montrer que

1. $\text{cond}_2(A) = \mu_n(A)/\mu_1(A)$ avec $\mu_n(A)$ et $\mu_1(A)$ respectivement la plus grande et la plus petite valeur singulière de A ;
2. si A est normale alors

$$\text{cond}_2(A) = \frac{\max_i |\lambda_i(A)|}{\min_i |\lambda_i(A)|},$$

3. Si $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ est inversible, $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ orthogonale alors

$$\text{cond}_2(A) = \text{cond}_2(AQ) = \text{cond}_2(QA)$$

[Correction ▼](#)

[002219]

Exercice 5

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 10^{-6} \end{pmatrix}$

1. Calculer $\text{cond}_2(A)$, $\text{cond}_1(A)$ et $\text{cond}_\infty(A)$;
2. Résoudre :
 - $Ax = b$ pour $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 10^{-6} \end{pmatrix}$
 - $Ay = b + \delta b$ pour $\delta b = \begin{pmatrix} 10^{-6} \\ 0 \end{pmatrix}$ et $Az = b + \Delta b$ pour $\Delta b = \begin{pmatrix} 0 \\ 10^{-6} \end{pmatrix}$
3. Pour chacune des trois normes considérées, trouver une majoration théorique de

$$\frac{\|y - x\|}{\|x\|} \text{ et } \frac{\|z - x\|}{\|x\|}$$

et comparer avec les valeurs exactes. Quelle conclusion ?

Exercice 6 Conditionnement du problème de l'inversion d'une matrice

Soit A une matrice inversible donnée.

1. si $(A + \delta A)$ est une matrice inversible, démontrer

$$\frac{\|(A + \delta A)^{-1} - A^{-1}\|}{\|(A + \delta A)^{-1}\|} \leq \text{cond}(A) \frac{\|\delta A\|}{\|A\|}$$

2. Démontrer que

$$\frac{\|(A + \delta A)^{-1} - A^{-1}\|}{\|A^{-1}\|} \leq \text{cond}(A) \frac{\|\delta A\|}{\|A\|} (1 + \mathcal{O}(\|A\|))$$

[Correction ▼](#)

Correction de l'exercice 1 ▲

4. On calcule

$$A^T A = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

et ses valeurs propres

$$\det \begin{pmatrix} 6-\lambda & 2 \\ 2 & 3-\lambda \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 = 7 = \mu_1^2, \lambda_2 = 2 = \mu_2^2$$

On calcule ensuite les vecteurs propres associés à ces valeurs propres

$$\begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

et la matrice V est la matrice dont les colonnes sont

$$v_1 = (2/\sqrt{5}, 1/\sqrt{5})^T, \quad v_2 = (1/\sqrt{5}, -2/\sqrt{5})^T$$

les colonnes de U sont alors données par

$$u_1 = Av_1/\mu_1 = 1/(\sqrt{7}\sqrt{5})(3, 5, -1)^T, \quad u_2 = Av_2/\mu_2 = 1/(\sqrt{2}\sqrt{5})(-1, 0, -3)^T$$

quant à u_3 il est choisi orthogonal à u_1 et u_2 et de norme 1.

Correction de l'exercice 2 ▲

1. $\Sigma^\dagger \Sigma e_i = e_i, i = 1, \dots, r$ c'est l'application identité

2. $AA^\dagger = U\Sigma V^* V \Sigma^\dagger U = U\Sigma \Sigma^\dagger U^* = I$

On a donc obtenu une généralisation de l'inverse.

3. $U^* \sum_{i=1}^m \varepsilon_i u_i^*$ avec $\{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_m\}$ base canonique de \mathbb{R}^m . Comme $\Sigma^\dagger \varepsilon_i = 0$ pour $r+1 \leq i \leq m$ on a

$$\Sigma^\dagger U^* = \sum_{i=1}^r \mu_i^{-1} e_i u_i^* \Rightarrow A^\dagger = V \Sigma^\dagger U^* = \sum_{i=1}^r \mu_i^{-1} (V e_i) u_i^* = \sum_{i=1}^r \mu_i^{-1} v_i u_i^*$$

4. On a

$$AA^\dagger = \sum_{i=1}^r \mu_i u_i v_i^* \sum_{j=1}^r \mu_j^{-1} v_j u_j^* = \sum_{j=1}^r \mu_j \mu_j^{-1} u_j u_j^*$$

Comme $\text{Im}(A) = \text{span}\{u_1, \dots, u_r\}$ le résultat suit.

5. soit $y \in \text{Im} A^* \Leftrightarrow u = \sum_{i=1}^r x_i v_i$. Alors

$$A^* A = V \Sigma^* U^* U \Sigma V^* = V \Sigma^* \Sigma V^* = \sum_{i=1}^r \mu_i^2 v_i v_i^* \Rightarrow A^* A y = \sum_{i=1}^r \mu_i^2 x_i v_i$$

et finalement

$$\left(\sum_{i=1}^r \mu_i^{-2} v_i v_i^* \right) (A^* A y) = \sum_{i=1}^r x_i v_i$$

Correction de l'exercice 3 ▲

1. $\|A\|_2 = \|U\Sigma V^*\|_2 = \|\Sigma\|_2 = \max |\sigma_j| = \sigma_1$

2. $\|A\|_F^2 = \text{tr}(A^* A) = \text{tr}(U^* A^* A U) = \|AU\|_F^2 = \text{tr}(A^* U^* U A) = \|UA\|_F^2$ et donc

$$\|A\|_F = \|U\Sigma V^*\|_F = \|\Sigma\|_F = \sqrt{\sigma_1^2 + \dots + \sigma_r^2}$$

3. $A^*A = (V\Sigma^*U^*)(U\Sigma V^*) = V(\Sigma^*\Sigma)V^*$ et donc A^*A est semblable à $\Sigma^*\Sigma$, les deux matrices ont donc les mêmes valeurs propres. Les valeurs propres de $\Sigma^*\Sigma$ sont $\sigma_1^2, \dots, \sigma_r^2$ plus $n - r$ valeurs propres nulles si $n > r$.
4. $|\det A| = |\det(U\Sigma V^*)| = |\det U| |\det \Sigma| |\det V^*| = |\det \Sigma| = \prod_{i=1}^r \sigma_i$
5. Une matrice hermitienne étant diagonalisable a une base orthonormale de vecteurs propres

$$A = Q\Lambda Q^* = Q|\Lambda| \text{sign}(\Lambda) Q^*$$

or $U = \text{sign}(\Lambda) Q^*$ est une matrice unitaire : $U^*U = Q \text{sign}(\Lambda) \text{sign}(\Lambda) Q^* = QQ^* = I$. Donc $Q|\Lambda|U$ est une décomposition en valeurs singulières de A , les valeurs singulières étant $|\lambda_1|, \dots, |\lambda_n|$.

Correction de l'exercice 4 ▲

1. $\|A\|_2^2 = \rho(A^*A) = \max_i \lambda_i(A^*A) = \mu_1^2(A)$ la plus grande valeur singulière de A
 $\|A^{-1}\|_2^2 = \rho(A^{-1}(A^{-1})^*) = \max_i \lambda_i((A^*A)^{-1}) = \frac{1}{\mu_n(A)^2}$ avec $\mu_n(A)$ la plus petite valeur singulière de A .
 Donc

$$\text{cond}_2(A) = \|A\|_2 \|A^{-1}\|_2 = \mu_n(A) / \mu_1(A)$$

2. Si A est normale alors $\|A\|_2 = \rho(A)$ rayon spectral. Donc

$$A^{-1} = UD^{-1}U^* \Rightarrow (A^{-1})^*A^{-1} = U(D^{-1})^*D^{-1}U^* \Rightarrow \rho((A^{-1})^*A^{-1}) = 1 / \min_i |\lambda_i(A)|^2$$

$$\text{cond}_2(A) = \max |\lambda_i(A)| / \min |\lambda_i(A)|$$

3. $\text{cond}_2(QA) = \|QA\|_2 \|A^{-1}Q^*\|_2 = \|A\|_2 \|A^{-1}\|_2 = \text{cond}_2(A)$.

Correction de l'exercice 6 ▲

$B = A + \delta A = A(I + A^{-1}\delta A)$ matrice inversible si $\|A^{-1}\delta A\| < 1$

$$B^{-1} - A^{-1} = A^{-1}(A - B)B^{-1} \Rightarrow \|B^{-1} - A^{-1}\| \leq \|A^{-1}\| \|A - B\| \|B^{-1}\| \Rightarrow$$

$$\frac{\|B^{-1} - A^{-1}\|}{\|B^{-1}\|} \leq \|A^{-1}\| \|A - B\| = \|A^{-1}\| \|\delta A\| = \text{cond}(A) \frac{\|\delta A\|}{\|A\|}$$