Enoncés et corrections : Ana Matos.

Quelques compléments d'algèbre matricielle

Exercice 1 Matrices triangulaires élémentaires

Soit $n \in \mathbb{N}$ et on définit les matrices suivantes dans $\mathbb{R}^{n\times n}$:

— E_{ij} matrice avec un 1 dans la position (i,j) et 0 partout ailleurs ;

— $V_{ij}(\lambda) = I + \lambda E_{ij}$, $\lambda \in \mathbb{R}, i > j$;

— $L(l_i) = I + l_i e_i^T$, $l_i \in \mathbb{R}^n$ tel que ses premières i composantes sont nulles.

1. Quels sont les résultats des opérations suivantes sur la matrice A :
$$B = V_{ij}(\lambda)A, C = AV_{ij}(\lambda)?$$
2. Quelle est la forme de la matrice
$$V_{ij}(\lambda)V_{kj}(\lambda'), k > i?$$
3. Représenter $L(l_i)$ et montrer que $L(l_i)^{-1} = L(-l_i)$.
4. Décomposer $L(l_i)$ comme produit de matrices de la forme $V_{km}(\lambda)$.
5. Calculer $L = \prod_{i=1}^{n-1} L(l_i)$ et son inverse L^{-1}
6. On suppose les l_i stockés dans un tableau bidimensionnel Z et $b \in \mathbb{R}^n$ stocké dans un tableau unidimensionnel B. Donner un algorithme permettant de calculer dans B la solution de $Lx = b$:
   (a) en utilisant l'expression de L^{-1} ;
   (b) en résolvant le système triangulaire.

   Quelle est la conclusion ?

Correction ▼ [002210]

Exercice 2 Quelques identités pour le calcul d'inverses

Démontrer l'identité
$$(A+UBV)^{-1} = A^{-1} - A^{-1}U(I+BVA^{-1}U)^{-1}BVA^{-1}$$
en précisant :

— son domaine de validité ;

— les types des matrices A, U, B, V.

Quelques cas particuliers :

1. Supposons $B = \beta$ scalaire, $U = u \in \mathbb{R}^n$, $V = v^T \in \mathbb{R}^n$. Retrouver la formule de Shermann–Morrison qui permet le calcul de l'inverse d'une matrice qui apparait comme perturbation de rang 1 d'une matrice dont on connait l'inverse.
2. Soient $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ régulière et $u, v \in \mathbb{R}^n$ tels que $1 + v^T A^{-1} u = 0$. Montrer que
$$B = \begin{pmatrix} A + uv^T & u \\ v^T & 0 \end{pmatrix} \text{ est régulière.}$$
   Calculer B^{-1} en remarquant que
$$B = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} u \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v^T & 1 \end{bmatrix}$$

3. Soit
$$D=\begin{bmatrix} P & Q \\ R & S \end{bmatrix} \text{ matrice inversible avec } P\in\mathbb{R}^{p\times p}, Q\in\mathbb{R}^{p\times q}, S\in\mathbb{R}^{q\times q}$$
Calculer D^{-1} en remarquant que
$$D=\begin{bmatrix} P & 0 \\ R & I \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} Q \\ S-I \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & I \end{bmatrix}$$

4. *Calcul récursif de l'inverse* : on pose
$$A_n=\begin{bmatrix} A_{n-1} & v \\ u^T & s \end{bmatrix} \text{ avec } A_{n-1}\in\mathbb{R}^{(n-1)\times(n-1)} u,v\in\mathbb{R}^{n-1}, s\in\mathbb{R}$$
Utiliser la formule précédente pour calculer A_n^{-1} en fonction de A_{n-1}^{-1}. En déduire un algorithme récursif pour le calcul de l'inverse d'une matrice carrée de taille n.

Correction ▼ [002211]

Exercice 3 Quelques propriétés des normes matricielles

1. Soit A une matrice d'ordre (m,n). Démontrer les inégalités suivantes pour les normes p, $p=1,2,\infty$ et la norme de Frobenius :
   (a) $\|A\|_2 \leqslant \|A|_F \leqslant \sqrt{n}\|A|_2$
   (b) $\max|a_{ij}| \leqslant \|A\|_2 \leqslant \sqrt{mn}\max|a_{ij}|$
   (c) $\dfrac{1}{\sqrt{n}}\|A\|_\infty \leqslant \|A\|_2 \leqslant \sqrt{m}\|A\|_\infty$
   (d) $\dfrac{1}{\sqrt{m}}\|A\|_1 \leqslant \|A\|_2 \leqslant \sqrt{n}\|A\|_1$
2. Soit $u\in\mathbb{R}^m$, $v\in\mathbb{R}^n$ et $E=uv^T$. Montrer que
$$\|E\|_F=\|E\|_2=\|u\|_2\|v\|_2$$
$$\|E\|_\infty=\|u\|_\infty\|v\|_1$$

Correction ▼ [002212]

Exercice 4

Montrer que si $\rho(A)<1$ alors
- $I-A$ est régulière ;
- $(I-A)^{-1}=\lim_{k\to\infty}C_k$ avec $C_k=I+A+\cdots+A^k$.

Correction ▼ [002213]

Exercice 5 Estimation de l'erreur dans le calcul de l'inverse

Soit A une matrice carrée d'ordre n inversible et B une approximation de A^{-1} On pose $X=I-AB$ et on suppose que $\|X\|<1$. Montrer que
$$\|A^{-1}-B\|\leqslant\frac{\|BX\|}{1-\|X\|}.$$

Correction ▼ [002214]

Exercice 6 Projection orthogonale sur un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$

Soient
- H =span$\{v_1,\cdots,v_r\}$ le sous–espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ engendré par les vecteurs $\{v_i\}$ supposés indépendants ;

— $V = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & \cdots & v_r \end{bmatrix}$ la matrice de type $n \times r$ dont les colonnes sont les composantes des v_i dans la base canonique $\varepsilon = (e_1, \cdots, e_n)$

Pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ on désigne par y sa projection orthogonale sur H et par X et Y les matrices colonnnes des composantes de x et y dans la base ε. On pose

$$y = \sum_{i=1}^{r} \alpha_i v_i.$$

1. Montrer que la matrice $G = G(v_1, \cdots, v_r) = V^T V$ est inversible.
2. Montrer que les α_i vérifient le système

$$G \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_r \end{pmatrix} = V^T X$$

3. En déduire que $Y = VG^{-1}V^T X = PX$ avec $P = VG^{-1}V^T$ (P est donc la matrice de la projection orthogonale de $\mathbb{R}^n$ sur H
4. *Application* : on considère $n = 3, v_1 = e_1, v_2 = e_1 + e_2 + e_3$. Déterminer la projection orthogonale sur $H = \operatorname{span}\{v_1, v_2\}$ de $x = 2e_1 - e_2 + e_3$.
5. Quelle est la matrice de la projection orthogonale sur H =span $\{v\}$?
6. Montrer que, pour $x \in \mathbb{R}^n$

$$d^2(x, H) = \frac{\det G(x, v_1, \cdots, v_r)}{\det G(v_1, \cdots, v_r)}$$

[002215]

Correction de l'exercice 1 ▲

1. VA remplace la ligne i par sa somme avec la ligne j multipliée par λ.
   AV remplace la colonne j par sa somme avec la colonne i multipliée par λ.
2. $V_{ij}(\lambda)V_{kj}) = I + \lambda E_{ij} + \lambda' E_{kj}$
3. Il suffit de montrer que $(I + l_i e_i^T)(I - l_i e_i^T) = I$.
4. $L(l_i) = V_{i+1,i}(l_{i+1,i}) \cdots V_{n,i}(l_{n,i})$
5. $L^{-1} = L(-l_{n-1})L(-l_{n-2}) \cdots L(-l_1) \neq I - l_1 e_1^T - \cdots - l_{n-1} e_{n-1}^T$
6. (a) algorithme en utilisant l'expression de L^{-1}
   Pour $i = 1$ à $n-1$
   calcul de $L(-l_i)b$
   Pour $j = i+1$ à n
   $b_j \leftarrow b_j - l_{ji} b_i$
   (b) algorithme en résolvant le système triangulaire
   $x_1 = b_1$
   Pour $i = 2$ à n
   $x_i = b_i - \sum_{j=1}^{i-1} l_{ij} x_j$
   conclusion : le nombre de calculs et l'espace mémoire utilisés sont les mêmes.

Correction de l'exercice 2 ▲

Pour démontrer l'égalité il suffit de multiplier le membre de droite par $5A + UBV)$ et montrer que l'on obtient l'identité.
Domaine de validité :$A \in \mathscr{M}_{n\times n}$ inversible, $U \in \mathscr{M}_{n\times p}$, $B \in \mathscr{M}_{p\times q}$, $V \in \mathscr{M}_{q\times n}$, $I + BVA^{-1}U$ inversible.

1. On obtient la formule de Shermann-Morrisson :
   $$(A + \beta uv^T)^{-1} = A^{-1} - \frac{\beta}{1 + \beta v^T A^{-1} u} A^{-1} uv^T A^{-1}$$
   qui permet le calcul de l'inverse d'une matrice qui apparait comme perturbation de rang 1 d'une matrice dont on connait l'inverse.
2. $$B \begin{pmatrix} X \\ y \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} (A + uv^T)x + yu = 0 \\ v^T x = 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = -yA^{-1}u \\ v^T x = -yv^T A^{-1} u = 0 \end{array} \right.$$
   ce qui donne $x = 0, y = 0$ et donc B est inversible.
3. En appliquant la formule générale on obtient
   $$B^{-1} = \begin{pmatrix} A^{-1} - A^{-1}uv^T A^{-1} & A^{-1}u \\ v^T A^{-1} & 0 \end{pmatrix}$$
4. En appliquant la même formule on obtient
   $$D^{-1} = \begin{pmatrix} P^{-1} + P^{-1}Q\Delta^{-1}RP^{-1} & -P^{-1}Q\Delta^{-1} \\ -\Delta^{-1}RP^{-1} & \Delta^{-1} \end{pmatrix}$$
   avec $\Delta = S - RP^{-1}Q$.
5. Calcul récursif de l'inverse : on dispose de A_{n-1}^{-1} de taille $(n-1)\times(n-1)$ et on veut calculer l'inverse de
   $$A_n = \begin{pmatrix} A_{n-1} & v \\ u^T & s \end{pmatrix} \text{ avec } u, v \in \mathbb{R}^{n-1}, s \in \mathbb{R}$$
   en utilisant la formule précédente on obtient
   $$A_n^{-1} = \begin{pmatrix} A_{n-1}^{-1} + \frac{1}{\delta} A_{n-1}^{-1} vu^T A_{n-1}^{-1} & -A_{n-1}^{-1} \frac{v}{\delta} \\ -u^T A_{n-1}^{-1}/\delta & \frac{1}{\delta} \end{pmatrix}$$
   avec $\delta = s - u^T A_{n-1}^{-1} v$.
   et on en déduit facilement l'algorithme.

Correction de l'exercice 3 ▲

1. $\|A\|_2^2 = \rho(A^*A)$ rayon spectral de la matrice A^*A. D'un autre cotê on a :

$$\|A\|_F^2 = \operatorname{tr}(A^*A) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i(A^*A) \begin{cases} \geqslant \rho(A^*A) \\ \leqslant n\rho(A^*A) \end{cases}$$

où tr est la trace de la matrice et λ_i ses valeurs propres.

2.
$$\|A\|_2 \leqslant \|A\|_F = \left(\sum_{i,j} |a_{ij}|^2\right)^{1/2} \leqslant (mn \max_{i,j} |a_{ij}|^2)^{1/2} = \sqrt{mn} \max_{i,j} |a_{ij}|$$

Soit x tel que : si $\max |a_{ij}| = |a_{i_0 j_0}|$ alors on pose $x = e_{j_0}, \|x\|_2 = 1$. Alors
$\|Ax\|_2^2 = \sum_{i=1}^n |a_{i,j_0}|^2 \geqslant \max |a_{ij}|^2 \Rightarrow \sup \|Ax\|_2^2 \geqslant \max |a_{ij}|^2$

3. On rappelle que $\|A\|_\infty = \sum_{j=1}^n |a_{i_0 j}|$ pour un certain i_0. Alors
$\|A\|_2^2 \leqslant \|A\|_F^2 = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n |a_{ij}|^2 \leqslant m \times \max_i \sum_{j=1}^n |a_{ij}|^2 \leqslant m \max \left(\sum_{j=1}^n |a_{ij}|\right)^2 = m\|A\|_\infty$
Choisissons maintenant $x = (x_i)$ avec $x_i =$signe$(a_{i_0 i})$. Alors

$$\sum_{j=1}^{n} a_{i_0 j} x_j = \sum_{j=1}^{n} |a_{i_0 j}| = \|A\|_\infty$$

$$\|x\|_2 = \sqrt{n} \Rightarrow \|Ax\|_2^2 = \sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j\right)^2 \geqslant \|A\|_\infty^2 \Rightarrow \frac{\|Ax\|_2}{\|x\|_2} \geqslant \frac{\|A\|_\infty}{\sqrt{n}}$$

ce qui implique $\|A\|_2 \geqslant \|A\|_\infty / \sqrt{n}$

4. Même démonstration que précédemment ou alors constater que $\|A\|_1 = \|A^T\|_\infty$.

5. $\|E\|_F^2 = \sum_{i,j} u_i^2 v_j^2 \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n u_i^2 v_j^2 = \|u\|_2^2 \|v\|_2^2$

$$\|E\|_\infty = \max_i \left(\sum_{j=1}^{n} |u_i v_j|\right) = \max_i \left(|u_i| \sum_{j=1}^{n} |v_j|\right) = \|v\|_1 \|u\|_\infty$$

$\|Ex\|_2^2 = \sum_{i=1}^m \left(u_i \sum_{j=1}^n v_j x_j\right)^2 = \sum_{i=1}^m u_i^2 \times (x,x)^2 = \|u\|_2^2 (x,v)^2$

$$\frac{\|Ex\|_2}{\|x\|_2} = \frac{(x,v)}{\|x\|_2} \|u\|_2 \Rightarrow \sup_x \frac{\|Ex\|_2}{\|x\|_2} = \|v\|_2 \|u\|_2$$

Correction de l'exercice 4 ▲

$\rho(A) < 1 \Rightarrow 1$ n'est pas valeur propre de $A \Rightarrow 0$ n'est pas valeur propre de $I - A \Rightarrow I - A$ inversible

$$(I-A)C_k = (I-A)(I + A + \cdots + A^k) = I - A^{k+1}$$

$C_k = (I-A)^{-1}(I - A^{k+1}) \Rightarrow (I-A)^{-1} - C_k = (I-A)^{-1} A^{k+1}$ et conc

$$\|(I-A)^{-1} - C_k\| \leqslant \|(I-A)^{-1}\| \|A^{k+1}\| \leqslant \|(I-A)^{-1}\| \|A\|^{k+1}$$

Comme $\|A\| < 1$ pour au moins une norme subordonnée on obtient finalement

$$\lim_{k \to \infty} \|(I-A)^{-1} - C_k\| = 0$$

Correction de l'exercice 5 ▲

$AB = I - X \Rightarrow B^{-1}A^{-1} = (I-X)^{-1} \Rightarrow A^{-1} = B(I-X)^{-1} = B(I+X+X^2+\cdots)$

$$\|A^{-1} - B\| \leqslant \|BX\|\|I+X+\cdots\| \leqslant \|BX\|(1+\|X\|+\|X\|^2+\cdots) \leqslant \frac{\|BX\|}{1-\|X\|}.$$

pour $\|X\| < 1$