Applications linéaires

1 Définition

Exercice 1

Déterminer si les applications f_i suivantes sont linéaires :

$$\begin{array}{rl}
f_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 & f_1(x,y) = (2x+y, x-y) \\
f_2 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 & f_2(x,y,z) = (xy, x, y) \\
f_3 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 & f_3(x,y,z) = (2x+y+z, y-z, x+y) \\
f_4 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4 & f_4(x,y) = (y, 0, x-7y, x+y) \\
f_5 : \mathbb{R}_3[X] \to \mathbb{R}^3 & f_5(P) = \big(P(-1), P(0), P(1)\big)
\end{array}$$

Indication ▼ Correction ▼ Vidéo ■ [000929]

Exercice 2

Soit E un espace vectoriel de dimension n et ϕ une application linéaire de E dans lui-même telle que $\phi^n = 0$ et $\phi^{n-1} \neq 0$. Soit $x \in E$ tel que $\phi^{n-1}(x) \neq 0$. Montrer que la famille $\{x, \phi(x), \phi^2(x), \ldots, \phi^{n-1}(x)\}$ est une base de E.

Indication ▼ Correction ▼ Vidéo ■ [000930]

2 Image et noyau

Exercice 3

Soit E un espace vectoriel et soient E_1 et E_2 deux sous-espaces vectoriels de dimension finie de E, on définit l'application $f\colon E_1 \times E_2 \to E$ par $f(x_1,x_2) = x_1 + x_2$.

1. Montrer que f est linéaire.
2. Déterminer le noyau et l'image de f.
3. Que donne le théorème du rang ?

Indication ▼ Correction ▼ Vidéo ■ [000934]

Exercice 4

Soit E un espace vectoriel de dimension n et f une application linéaire de E dans lui-même. Montrer que les deux assertions qui suivent sont équivalentes :

(i) $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Im} f$

(ii) $f^2 = 0$ et $n = 2 \cdot \operatorname{rg}(f)$

Indication ▼ Correction ▼ Vidéo ■ [000943]

Exercice 5

Soient f et g deux endomorphismes de E tels que $f \circ g = g \circ f$. Montrer que $\operatorname{Ker} f$ et $\operatorname{Im} f$ sont stables par g.

Indication ▼ Correction ▼ Vidéo ■ [000947]

Exercice 6

Soit E et F de dimensions finies et $u,v \in \mathscr{L}(E,F)$.

1. Montrer que $\mathrm{rg}(u+v) \leqslant \mathrm{rg}(u)+\mathrm{rg}(v)$.
2. En déduire que $|\mathrm{rg}(u)-\mathrm{rg}(v)| \leqslant \mathrm{rg}(u+v)$.

Correction ▼ Vidéo ■ [001027]

3 Injectivité, surjectivité, isomorphie

Exercice 7

Pour les applications linéaires suivantes, déterminer $\mathrm{Ker}\, f_i$ et $\mathrm{Im}\, f_i$. En déduire si f_i est injective, surjective, bijective.

$$\begin{array}{rl} f_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 & f_1(x,y) = (2x+y, x-y) \\ f_2 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 & f_2(x,y,z) = (2x+y+z, y-z, x+y) \\ f_3 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4 & f_3(x,y) = (y, 0, x-7y, x+y) \\ f_4 : \mathbb{R}_3[X] \to \mathbb{R}^3 & f_4(P) = \big(P(-1), P(0), P(1)\big) \end{array}$$

Correction ▼ Vidéo ■ [000956]

Exercice 8

Soit E un espace vectoriel de dimension 3, $\{e_1,e_2,e_3\}$ une base de E, et t un paramètre réel.

Démontrer que la donnée de $\left\{\begin{array}{rcl} \phi(e_1) & = & e_1+e_2 \\ \phi(e_2) & = & e_1-e_2 \\ \phi(e_3) & = & e_1+te_3 \end{array}\right.$ définit une application linéaire ϕ de E dans E. Écrire le transformé du vecteur $x = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3$. Comment choisir t pour que ϕ soit injective ? surjective ?

Indication ▼ Correction ▼ Vidéo ■ [000954]

Exercice 9

Soit E et F deux espaces vectoriels de dimension finie et ϕ une application linéaire de E dans F. Montrer que ϕ est un isomorphisme si et seulement si l'image par ϕ de toute base de E est une base de F.

Indication ▼ Correction ▼ Vidéo ■ [000963]

4 Morphismes particuliers

Exercice 10

Soit E l'espace vectoriel des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Soient P le sous-espace des fonctions paires et I le sous-espace des fonctions impaires. Montrer que $E = P \bigoplus I$. Donner l'expression du projecteur sur P de direction I.

Indication ▼ Correction ▼ Vidéo ■ [000974]

Exercice 11

Soit $E = \mathbb{R}_n[X]$ et soient A et B deux polynômes à coefficients réels de degré $n+1$. On considère l'application f qui à tout polynôme P de E, associe le reste de la division euclidienne de AP par B.

1. Montrer que f est un endomorphisme de E.
2. Montrer l'équivalence

$$f \text{ est bijective} \iff A \text{ et } B \text{ sont premiers entre eux.}$$

Indication ▼ Correction ▼ Vidéo ■ [000959]

Exercice 12

Soit $E = \mathbb{R}_n[X]$ l'espace vectoriel des polynômes de degré $\leqslant n$, et $f : E \to E$ définie par :

$$f(P) = P + (1 - X)P'.$$

Montrer que f est une application linéaire et donner une base de $\operatorname{Im} f$ et de $\operatorname{Ker} f$.

Indication ▼ Correction ▼ Vidéo ■ [000976]

Indication pour l'exercice 1 ▲

Une seule application n'est pas linéaire.

Indication pour l'exercice 2 ▲

Prendre une combinaison linéaire nulle et l'évaluer par ϕ^{n-1}.

Indication pour l'exercice 3 ▲

Faire un dessin de l'image et du noyau pour $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$. Montrer que le noyau est isomorphe à $E_1 \cap E_2$.

Indication pour l'exercice 4 ▲

Pour chacune des implications utiliser la formule du rang.

Indication pour l'exercice 5 ▲

Dire qu'un sous-espace F est stable par g signifie que $g(F) \subset F$.

Indication pour l'exercice 8 ▲

$t = 0$ est un cas à part.

Indication pour l'exercice 9 ▲

Pour une base $\mathscr{B} = \{e_1, \dots, e_n\}$ de E considérer la famille $\{\phi(e_1), \dots, \phi(e_n)\}$.

Indication pour l'exercice 10 ▲

Pour une fonction f on peut écrire

$$f(x) = \frac{f(x)+f(-x)}{2} + \frac{f(x)-f(-x)}{2}.$$

Le projecteur sur P de direction I est l'application $\pi : E \longrightarrow E$ qui vérifie $\pi(f) \in P$, $\pi \circ \pi = \pi$ et $\operatorname{Ker} \pi = I$.

Indication pour l'exercice 11 ▲

Résultats utiles d'arithmétique des polynômes : la division euclidienne, le théorème de Bézout, le lemme de Gauss.

Indication pour l'exercice 12 ▲

P' désigne la dérivée de P. Pour trouver le noyau, résoudre une équation différentielle. Pour l'image calculer les $f(X^k)$.

Correction de l'exercice 1 ▲

1. f_1 est linéaire. Pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ et $(x',y') \in \mathbb{R}^2$:

$$\begin{aligned} f_1\big((x,y)+(x',y')\big) &= f_1\big(x+x',y+y'\big) \\ &= \big(2(x+x')+(y+y'),(x+x')-(y+y')\big) \\ &= \big(2x+y+2x'+y',x-y+x'-y'\big) \\ &= \big(2x+y,x-y\big)+\big(2x'+y',x'-y'\big) \\ &= f_1(x,y)+f_1(x',y') \end{aligned}$$

Pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$f_1\big(\lambda \cdot (x,y)\big) = f_1\big(\lambda x, \lambda y\big) = \big(2\lambda x+\lambda y, \lambda x - \lambda y\big) = \lambda \cdot \big(2x+y,x-y\big) = \lambda \cdot f_1(x,y).$$

2. f_2 n'est pas linéaire, en effet par exemple $f_2(1,1,0)+f_2(1,1,0)$ n'est pas égal à $f_2(2,2,0)$.
3. f_3 est linéaire : il faut vérifier d'abord que pour tout (x,y,z) et (x',y',z') alors $f_3\big((x,y,z)+(x',y',z')\big) = f_3(x,y,z)+f_3(x',y',z')$. Et ensuite que pour tout (x,y,z) et λ on a $f_3\big(\lambda \cdot (x,y,z)\big) = \lambda \cdot f_3(x,y,z)$.
4. f_4 est linéaire : il faut vérifier d'abord que pour tout (x,y) et (x',y') alors $f_4\big((x,y)+(x',y')\big) = f_4(x,y)+f_4(x',y')$. Et ensuite que pour tout (x,y) et λ on a $f_4\big(\lambda \cdot (x,y)\big) = \lambda \cdot f_4(x,y)$.
5. f_5 est linéaire : soient $P,P' \in \mathbb{R}_3[X]$ alors

$$\begin{aligned} f_5\big(P+P'\big) &= \big((P+P')(-1),(P+P')(0),(P+P')(1)\big) \\ &= \big(P(-1)+P'(-1),P(0)+P'(0),P(1)+P'(1)\big) \\ &= \big(P(-1),P(0),P(1)\big)+\big(P'(-1),P'(0),P'(1)\big) \\ &= f_5(P)+f_5(P') \end{aligned}$$

Et si $P \in \mathbb{R}_3[X]$ et $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} f_5\big(\lambda \cdot P\big) &= \big((\lambda P)(-1),(\lambda P)(0),(\lambda P)(1)\big) \\ &= \big(\lambda \times P(-1),\lambda \times P(0),\lambda \times P(1)\big) \\ &= \lambda \cdot \big(P(-1),P(0),P(1)\big) \\ &= \lambda \cdot f_5(P) \end{aligned}$$

Correction de l'exercice 2 ▲

Montrons que la famille $\{x,\phi(x),\phi^2(x),\dots,\phi^{n-1}(x)\}$ est libre. Soient $\lambda_0,\dots,\lambda_{n-1} \in \mathbb{R}$ tels que $\lambda_0 x+\lambda_1\phi(x)+\dots+\lambda_{n-1}\phi^{n-1}(x) = 0$. Alors : $\phi^{n-1}\big(\lambda_0 x+\lambda_1\phi(x)+\dots+\lambda_{n-1}\phi^{n-1}(x)\big) = 0$. Mais comme de plus $\phi^n = 0$, on a l'égalité $\phi^{n-1}\big(\lambda_0 x+\lambda_1\phi(x)+\dots+\lambda_{n-1}\phi^{n-1}(x)\big) = \phi^{n-1}(\lambda_0 x)+\phi^n\big(\lambda_1 x+\dots+\lambda_{n-1}\phi^{n-2}(x)\big) = \phi^{n-1}(\lambda_0 x) = \lambda_0\phi^{n-1}(x)$. Comme $\phi^{n-1}(x) \neq 0$ on obtient $\lambda_0 = 0$.
En calculant ensuite $\phi^{n-2}\big(\lambda_1\phi(x)+\dots+\lambda_{n-1}\phi^{n-1}(x)\big)$ on obtient $\lambda_1 = 0$ puis, de proche en proche, $\lambda_2 = 2,\dots$, $\lambda_{n-1} = 0$. La famille $\{x,\phi(x),\dots,\phi^{n-1}(x)\}$ est donc libre. En plus elle compte n vecteurs, comme $\dim E = n$ elle est libre et maximale et forme donc une base de E.

Correction de l'exercice 3 ▲

1. Aucun problème...

2. Par définition de f et de ce qu'est la somme de deux sous-espaces vectoriels, l'image est

$$\operatorname{Im} f = \{f(x_1,x_2) \mid x_1 \in E_1, x_2 \in E_2\} = \{x_1 + x_2 \mid x_1 \in E_1, x_2 \in E_2\} = E_1 + E_2.$$

Pour le noyau :

$$\operatorname{Ker} f = \{(x_1,x_2) \mid f(x_1,x_2) = 0\} = \{(x_1,x_2) \mid x_1 + x_2 = 0\}$$

Mais on peut aller un peu plus loin. En effet un élément $(x_1,x_2) \in \operatorname{Ker} f$, vérifie $x_1 \in E_1$, $x_2 \in E_2$ et $x_1 = -x_2$. Donc $x_1 \in E_2$. Donc $x_1 \in E_1 \cap E_2$. Réciproquement si $x \in E_1 \cap E_2$, alors $(x,-x) \in \operatorname{Ker} f$. Donc

$$\operatorname{Ker} f = \{(x,-x) \mid x \in E_1 \cap E_2\}.$$

De plus l'application $x \mapsto (x,-x)$ montre que $\operatorname{Ker} f$ est isomorphe à $E_1 \cap E_2$.

3. Le théorème du rang s'écrit :

$$\dim \operatorname{Ker} f + \dim \operatorname{Im} f = \dim(E_1 \times E_2).$$

Compte tenu de l'isomorphisme entre $\operatorname{Ker} f$ et $E_1 \cap E_2$ on obtient :

$$\dim(E_1 \cap E_2) + \dim(E_1 + E_2) = \dim(E_1 \times E_2).$$

Mais $\dim(E_1 \times E_2) = \dim E_1 + \dim E_2$, donc on retrouve ce que l'on appelle le théorème des quatre dimensions :

$$\dim(E_1 + E_2) = \dim E_1 + \dim E_2 - \dim(E_1 \cap E_2).$$

Correction de l'exercice 4 ▲

(i) $\Rightarrow$ (ii) Supposons $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Im} f$. Soit $x \in E$, alors $f(x) \in \operatorname{Im} f$ donc $f(x) \in \operatorname{Ker} f$, cela entraîne $f(f(x)) = 0$; donc $f^2 = 0$. De plus d'après la formule du rang $\dim \operatorname{Ker} f + \operatorname{rg}(f) = n$, mais $\dim \operatorname{Ker} f = \dim \operatorname{Im} f = \operatorname{rg} f$, ainsi $2\operatorname{rg}(f) = n$.

(ii) $\Rightarrow$ (i) Si $f^2 = 0$ alors $\operatorname{Im} f \subset \operatorname{Ker} f$ car pour $y \in \operatorname{Im} f$ il existe x tel que $y = f(x)$ et $f(y) = f^2(x) = 0$. De plus si $2\operatorname{rg}(f) = n$ alors la formule du rang donne $\dim \operatorname{Ker} f = \operatorname{rg}(f)$ c'est-à-dire $\dim \operatorname{Ker} f = \dim \operatorname{Im} f$. Nous savons donc que $\operatorname{Im} f$ est inclus dans $\operatorname{Ker} f$ mais ces espaces sont de même dimension donc sont égaux : $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Im} f$.

Correction de l'exercice 5 ▲

On va montrer $g(\operatorname{Ker} f) \subset \operatorname{Ker} f$. Soit $y \in g(\operatorname{Ker} f)$. Il existe $x \in \operatorname{Ker} f$ tel que $y = g(x)$. Montrons $y \in \operatorname{Ker} f$:

$$f(y) = f(g(x)) = f \circ g(x) = g \circ f(x) = g(0) = 0.$$

On fait un raisonnement similaire pour montrer $g(\operatorname{Im} f) \subset \operatorname{Im} f$. Soit $z \in g(\operatorname{Im} f)$, il existe $y \in \operatorname{Im} f$ tel que $z = g(y)$. Il existe alors $x \in E$ tel que $y = f(x)$. Donc

$$z = g(y) = g(f(x)) = g \circ f(x) = f \circ g(x) = f(g(x)) \in \operatorname{Im} f.$$

Correction de l'exercice 6 ▲

1. Par la formule $\dim(G+H) = \dim(G) + \dim(H) - \dim(G \cap H)$, on sait que $\dim(G+H) \leqslant \dim(G) + \dim(H)$. Pour $G = \operatorname{Im} u$ et $H = \operatorname{Im} v$ on obtient : $\dim(\operatorname{Im} u + \operatorname{Im} v) \leqslant \dim \operatorname{Im} u + \dim \operatorname{Im} v$. Or $\operatorname{Im}(u+v) \subset \operatorname{Im} u + \operatorname{Im} v$. Donc $\operatorname{rg}(u+v) \leqslant \operatorname{rg}(u) + \operatorname{rg}(v)$.
2. On applique la formule précédente à $u+v$ et $-v$: $\operatorname{rg}((u+v)+(-v)) \leqslant \operatorname{rg}(u+v) + \operatorname{rg}(-v)$, or $\operatorname{rg}(-v) = \operatorname{rg}(v)$ donc $\operatorname{rg}(u) \leqslant \operatorname{rg}(u+v) + \operatorname{rg}(v)$. Donc $\operatorname{rg}(u) - \operatorname{rg}(v) \leqslant \operatorname{rg}(u+v)$. On recommence en échangeant u et v pour obtenir : $|\operatorname{rg}(u) - \operatorname{rg}(v)| \leqslant \operatorname{rg}(u+v)$.

Correction de l'exercice 7 ▲

Calculer le noyau revient à résoudre un système linéaire, et calculer l'image aussi. On peut donc tout faire "à la main".

Mais on peut aussi appliquer un peu de théorie ! Noyau et image sont liés par la formule du rang : $\dim \operatorname{Ker} f + \dim \operatorname{Im} f = \dim E$ pour $f : E \to F$. Donc si on a trouvé le noyau alors on connaît la dimension de l'image. Et il suffit alors de trouver autant de vecteur de l'image.

1. f_1 est injective, surjective (et donc bijective).

   (a) Faisons tout à la main. Calculons le noyau :

$$\begin{aligned}(x,y) \in \operatorname{Ker} f_1 &\iff f_1(x,y) = (0,0) \iff (2x+y, x-y) = (0,0) \\ &\iff \begin{cases} 2x+y=0 \\ x-y=0 \end{cases} \iff (x,y) = (0,0)\end{aligned}$$

   Ainsi $\operatorname{Ker} f_1 = \{(0,0)\}$ et donc f_1 est injective.

   (b) Calculons l'image. Quels éléments (X,Y) peuvent s'écrire $f_1(x,y)$?

$$\begin{aligned}f_1(x,y) = (X,Y) &\iff (2x+y, x-y) = (X,Y) \\ &\iff \begin{cases} 2x+y=X \\ x-y=Y \end{cases} \iff \begin{cases} x = \frac{X+Y}{3} \\ y = \frac{X-2Y}{3} \end{cases} \\ &\iff (x,y) = \left(\frac{X+Y}{3}, \frac{X-2Y}{3}\right)\end{aligned}$$

   Donc pour n'importe quel $(X,Y) \in \mathbb{R}^2$ on trouve un antécédent $(x,y) = (\frac{X+Y}{3}, \frac{X-2Y}{3})$ qui vérifie donc $f_1(x,y) = (X,Y)$. Donc $\operatorname{Im} f_1 = \mathbb{R}^2$. Ainsi f_1 est surjective.

   (c) Conclusion : f_1 est injective et surjective donc bijective.

2. (a) Calculons d'abord le noyau :

$$\begin{aligned}(x,y,z) \in \operatorname{Ker} f_2 &\iff f_2(x,y,z) = (0,0,0) \\ &\iff (2x+y+z, y-z, x+y) = (0,0,0) \\ &\iff \begin{cases} 2x+y+z=0 \\ y-z=0 \\ x+y=0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x=-z \\ y=z \end{cases} \\ &\iff \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -z \\ z \\ z \end{pmatrix} \\ &\iff \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \operatorname{Vect} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \left\{ \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \mid \lambda \in \mathbb{R} \right\}\end{aligned}$$

   Ainsi $\operatorname{Ker} f_2 = \operatorname{Vect}(-1,1,1)$ et donc f_2 n'est pas injective.

(b) Maintenant nous allons utiliser que $\operatorname{Ker} f_2 = \operatorname{Vect}(-1,1,1)$, autrement dit $\dim \operatorname{Ker} f_2 = 1$. La formule du rang, appliquée à $f_2 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ s'écrit $\dim \operatorname{Ker} f_2 + \dim \operatorname{Im} f_2 = \dim \mathbb{R}^3$. Donc $\dim \operatorname{Im} f_2 = 2$. Nous allons trouver une base de $\operatorname{Im} f_2$. Il suffit donc de trouver deux vecteurs linéairement indépendants. Prenons par exemple $v_1 = f_2(1,0,0) = (2,0,1) \in \operatorname{Im} f_2$ et $v_2 = f_2(0,1,0) = (1,1,1) \in \operatorname{Im} f_2$. Par construction ces vecteurs sont dans l'image de f_2 et il est clair qu'ils sont linéairement indépendants. Donc $\{v_1, v_2\}$ est une base de $\operatorname{Im} f_2$.

(c) f_2 n'est ni injective, ni surjective (donc pas bijective).

3. Sans aucun calcul on sait $f_3 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4$ ne peut être surjective car l'espace d'arrivée est de dimension strictement supérieur à l'espace de départ.

(a) Calculons le noyau :

$$\begin{aligned}
(x,y) \in \operatorname{Ker} f_3 &\iff f_3(x,y) = (0,0,0,0) \\
&\iff (y, 0, x-7y, x+y) = (0,0,0,0) \\
&\iff \begin{cases} y = 0 \\ 0 = 0 \\ x - 7y = 0 \\ x + y = 0 \end{cases} \\
&\iff \cdots \\
&\iff (x,y) = (0,0)
\end{aligned}$$

Ainsi $\operatorname{Ker} f_3 = \{(0,0)\}$ et donc f_3 est injective.

(b) La formule du rang, appliquée à $f_3 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4$ s'écrit $\dim \operatorname{Ker} f_3 + \dim \operatorname{Im} f_3 = \dim \mathbb{R}^2$. Donc $\dim \operatorname{Im} f_3 = 2$. Ainsi $\operatorname{Im} f_3$ est un espace vectoriel de dimension 2 inclus dans $\mathbb{R}^3$, f_3 n'est pas surjective.

Par décrire $\operatorname{Im} f_3$ nous allons trouver deux vecteurs indépendants de $\operatorname{Im} f_3$. Il y a un nombre infini de choix : prenons par exemple $v_1 = f(1,0) = (0,0,1,1)$. Pour v_2 on cherche (un peu à tâtons) un vecteur linéairement indépendant de v_1. Essayons $v_2 = f(0,1) = (1,0,-7,1)$. Par construction $v_1, v_2 \in \operatorname{Im} f$; ils sont clairement linéairement indépendants et comme $\dim \operatorname{Im} f_3 = 2$ alors $\{v_1, v_2\}$ est une base de $\operatorname{Im} f_3$.

Ainsi $\operatorname{Im} f_3 = \operatorname{Vect}\{v_1, v_2\} = \big\{\lambda(0,0,1,1) + \mu(1,0,-7,1) \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R}\big\}$.

4. $f_4 : \mathbb{R}_3[X] \to \mathbb{R}^3$ va d'un espace de dimension 4 vers un espace de dimension strictement plus petit et donc f_4 ne peut être injective.

(a) Calculons le noyau. Écrivons un polynôme P de degré $\leqslant 3$ sous la forme $P(X) = aX^3 + bX^2 + cX + d$. Alors $P(0) = d$, $P(1) = a+b+c+d$, $P(-1) = -a+b-c+d$.

$$\begin{aligned}
P(X) \in \operatorname{Ker} f_4 &\iff \big(P(-1), P(0), P(1)\big) = (0,0,0) \\
&\iff (-a+b-c+d, d, a+b+c+d) = (0,0,0) \\
&\iff \begin{cases} -a+b-c+d = 0 \\ d = 0 \\ a+b+c+d = 0 \end{cases} \\
&\iff \cdots \\
&\iff \begin{cases} a = -c \\ b = 0 \\ d = 0 \end{cases} \\
&\iff (a,b,c,d) = (t, 0, -t, 0) \quad t \in \mathbb{R}
\end{aligned}$$

Ainsi le noyau $\operatorname{Ker} f_4 = \big\{tX^3 - tX \mid t \in \mathbb{R}\big\} = \operatorname{Vect}\{X^3 - X\}$. f_4 n'est pas injective son noyau étant de dimension 1.

(b) La formule du rang pour $f_4 : \mathbb{R}_3[X] \to \mathbb{R}^3$ s'écrit $\dim \operatorname{Ker} f_4 + \dim \operatorname{Im} f_4 = \dim \mathbb{R}_3[4]$. Autrement dit $1 + \dim \operatorname{Im} f_4 = 4$. Donc $\dim \operatorname{Im} f_4 = 3$. Ainsi $\operatorname{Im} f_4$ est un espace de dimension 3 dans $\mathbb{R}^3$ donc $\operatorname{Im} f_4 = \mathbb{R}^3$. Conclusion f_4 est surjective.

Correction de l'exercice 8 ▲

1. Comment est définie ϕ à partir de la définition sur les éléments de la base ? Pour $x \in E$ alors x s'écrit dans la base $\{e_1, e_2, e_3\}$, $x = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3$. Et ϕ est définie sur E par la formule
$$\phi(x) = \alpha_1 \phi(e_1) + \alpha_2 \phi(e_2) + \alpha_3 \phi(e_3).$$
Soit ici :
$$\phi(x) = (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) e_1 + (\alpha_1 - \alpha_2) e_2 + t\alpha_3 e_3.$$
Cette définition rend automatiquement ϕ linéaire (vérifiez-le si vous n'êtes pas convaincu !).

2. On cherche à savoir si ϕ est injective. Soit $x \in E$ tel que $\phi(x) = 0$ donc $(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) e_1 + (\alpha_1 - \alpha_2) e_2 + t\alpha_3 e_3 = 0$. Comme $\{e_1, e_2, e_3\}$ est une base alors tous les coefficients sont nuls :
$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0, \quad \alpha_1 - \alpha_2 = 0, \quad t\alpha_3 = 0.$$
Si $t \neq 0$ alors en résolvant le système on obtient $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = 0$, $\alpha_3 = 0$. Donc $x = 0$ et ϕ est injective.
Si $t = 0$, alors ϕ n'est pas injective, en résolvant le même système on obtient des solutions non triviales, par exemple $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = 1$, $\alpha_3 = -2$. Donc pour $x = e_1 + e_2 - 2e_3$ on obtient $\phi(x) = 0$.

3. Pour la surjectivité on peut soit faire des calculs, soit appliquer la formule du rang. Examinons cette deuxième méthode. ϕ est surjective si et seulement si la dimension de $\operatorname{Im} \phi$ est égale à la dimension de l'espace d'arrivée (ici E de dimension 3). Or on a une formule pour $\dim \operatorname{Im} \phi$:
$$\dim \operatorname{Ker} \phi + \dim \operatorname{Im} \phi = \dim E.$$
Si $t \neq 0$, ϕ est injective donc $\operatorname{Ker} \phi = \{0\}$ est de dimension 0. Donc $\dim \operatorname{Im} \phi = 3$ et ϕ est surjective.
Si $t = 0$ alors ϕ n'est pas injective donc $\operatorname{Ker} \phi$ est de dimension au moins 1 (en fait 1 exactement), donc $\dim \operatorname{Im} \phi \leqslant 2$. Donc ϕ n'est pas surjective.
On remarque que ϕ est injective si et seulement si elle est surjective. Ce qui est un résultat du cours pour les applications ayant l'espace de départ et d'arrivée de même dimension (finie).

Correction de l'exercice 9 ▲

1. Montrons que si ϕ est un isomorphisme, l'image de toute base de E est une base de F : soit $\mathscr{B} = \{e_1, \ldots, e_n\}$ une base de E et nommons $\mathscr{B}'$ la famille $\{\phi(e_1), \ldots, \phi(e_n)\}$.
   (a) $\mathscr{B}'$ est libre. Soient en effet $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ tels que $\lambda_1 \phi(e_1) + \cdots + \lambda_n \phi(e_n) = 0$. Alors $\phi(\lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_n e_n) = 0$ donc, comme ϕ est injective, $\lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_n e_n = 0$ puis, comme $\mathscr{B}$ est libre, $\lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0$.
   (b) $\mathscr{B}'$ est génératrice. Soit $y \in F$. Comme ϕ est surjective, il existe $x \in E$ tel que $y = \phi(x)$. Comme $\mathscr{B}$ est génératrice, on peut choisir $\lambda_1, \cdots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ tels que $x = \lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_n e_n$. Alors $y = \lambda_1 \phi(e_1) + \cdots + \lambda_n \phi(e_n)$.
2. Supposons que l'image par ϕ de toute base de E soit une base F. Soient $\mathscr{B} = \{e_1, \ldots, e_n\}$ une base de E et $\mathscr{B}'$ la base $\{\phi(e_1), \ldots, \phi(e_n)\}$.
   (a) $\operatorname{Im} \phi$ contient $\mathscr{B}'$ qui est une partie génératrice de F. Donc ϕ est surjective.
   (b) Soit maintenant $x \in E$ tel que $\phi(x) = 0$. Comme $\mathscr{B}$ est une base, il existe $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ tels que $x = \lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_n e_n$. Alors $\phi(x) = 0 = \lambda_1 \phi(e_1) + \cdots + \lambda_n \phi(e_n)$ donc puisque $\mathscr{B}'$ est libre : $\lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0$. En conséquence si $\phi(x) = 0$ alors $x = 0$: ϕ est injective.

En fait on montrerait de la même façon que “ϕ est un isomorphisme si et seulement si l'image par ϕ **d'une** base de E est une base de F”.

Correction de l'exercice 10 ▲

1. La seule fonction qui est à la fois paire et impaire est la fonction nulle : $P \cap I = \{0\}$. Montrons qu'une fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ se décompose en une fonction paire et une fonction impaire. En effet :
$$f(x) = \frac{f(x)+f(-x)}{2} + \frac{f(x)-f(-x)}{2}.$$
La fonction $x \mapsto \frac{f(x)+f(-x)}{2}$ est paire (le vérifier !), la fonction $x \mapsto \frac{f(x)-f(-x)}{2}$ est impaire. Donc $P+I=E$. Bilan : $E = P \oplus I$.
2. Le projecteur sur P de direction I est l'application $\pi : E \longrightarrow E$ qui à f associe la fonction $x \mapsto \frac{f(x)+f(-x)}{2}$, c'est-à-dire à f on associe la partie paire de f. Nous avons bien
   — $\pi(f) \in P$. Par définition de π, $\pi(f)$ est bien une fonction paire.
   — $\pi \circ \pi = \pi$. Si g est une fonction paire alors $\pi(g) = g$. Appliquons ceci avec $g = \pi(f)$ (qui est bien est une fonction paire) donc $\pi(\pi(f)) = \pi(f)$.
   — $\operatorname{Ker} \pi = I$. Si $\pi(f) = 0$ alors cela signifie exactement que la fonction $x \mapsto \frac{f(x)+f(-x)}{2}$ est la fonction nulle. Donc pour tout x : $\frac{f(x)+f(-x)}{2} = 0$ donc $f(x) = -f(-x)$; cela implique que f est une fonction impaire. Réciproquement si $f \in I$ est une fonction impaire, sa partie paire est nulle donc $f \in \operatorname{Ker} f$.

Correction de l'exercice 11 ▲

1. Soit $P \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors la division euclidienne de AP par B s'écrit $AP = Q \cdot B + R$, donc en multipliant par λ on obtient : $A \cdot (\lambda P) = (\lambda Q)B + \lambda R$. ce qui est la division euclidienne de $A \cdot (\lambda P)$ par B, donc si $f(P) = R$ alors $f(\lambda P) = \lambda R$. Donc $f(\lambda P) = \lambda f(P)$.
Soient $P, P' \in E$. On écrit les divisions euclidiennes :
$$AP = Q \cdot B + R, \quad AP' = Q' \cdot B + R'.$$
En additionnant :
$$A(P+P') = (Q+Q')B + (R+R')$$
qui est la division euclidienne de $A(P+P')$ par B. Donc si $f(P) = R$, $f(P') = R'$ alors $f(P+P') = R+R' = f(P)+f(P')$.
Donc f est linéaire.
2. Sens $\Rightarrow$. Supposons f est bijective, donc en particulier f est surjective, en particulier il existe $P \in E$ tel que $f(P) = 1$ (1 est le polynôme constant égale à 1). La division euclidienne est donc $AP = BQ + 1$, autrement dit $AP - BQ = 1$. Par le théorème de Bézout, A et B sont premiers entre eux.
3. Sens $\Leftarrow$. Supposons A, B premiers entre eux. Montrons que f est injective. Soit $P \in E$ tel que $f(P) = 0$. Donc la division euclidienne s'écrit : $AP = BQ + 0$. Donc B divise AP. Comme A et B sont premiers entre eux, par le lemme de Gauss, alors B divise P. Or B est de degré $n+1$ et P de degré moins que n, donc la seule solution est $P = 0$. Donc f est injective. Comme $f : E \longrightarrow E$ est injective et E est de dimension finie, alors f est bijective.

Correction de l'exercice 12 ▲

1. f est bien linéaire...
2. Soit P tel que $f(P) = 0$. Alors P vérifie l'équation différentielle
$$P + (1-X)P' = 0.$$
Dont la solution est $P = \lambda(X-1)$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Donc $\operatorname{Ker} f$ est de dimension 1 et une base est donnée par un seul vecteur : $X-1$.

3. Par le théorème du rang la dimension de l'image est :

$$\dim \operatorname{Im} f = \dim \mathbb{R}_n[X] - \dim \operatorname{Ker} f = (n+1) - 1 = n.$$

Il faut donc trouver n vecteurs linéairement indépendants dans $\operatorname{Im} f$. Évaluons $f(X^k)$, alors

$$f(X^k) = (1-k)X^k + kX^{k-1}.$$

Cela donne $f(1) = 1, f(X) = 1, f(X^2) = -X^2 + 2X, \ldots$ on remarque que pour $k = 2, \ldots n$, $f(X^k)$ est de degré k sans terme constant. Donc l'ensemble

$$\left\{ f(X), f(X^2), \ldots, f(X^n) \right\}$$

est une famille de n vecteurs, appartenant à $\operatorname{Im} f$, et libre (car les degrés sont distincts). Donc ils forment une base de $\operatorname{Im} f$.
