

Equations différentielles

Exercice 1

On se propose d'intégrer sur l'intervalle le plus grand possible contenu dans $]0, \infty[$ l'équation différentielle :

$$(E) \quad y'(x) - \frac{y(x)}{x} - y(x)^2 = -9x^2.$$

1. Déterminer $a \in]0, \infty[$ tel que $y(x) = ax$ soit une solution particulière y_0 de (E) .
2. Montrer que le changement de fonction inconnue : $y(x) = y_0(x) - \frac{1}{z(x)}$ transforme l'équation (E) en l'équation différentielle

$$(E_1) \quad z'(x) + \left(6x + \frac{1}{x}\right)z(x) = 1.$$

3. Intégrer (E_1) sur $]0, \infty[$.
4. Donner toutes les solutions de (E) définies sur $]0, \infty[$.

[Correction ▼](#)

[000847]

Exercice 2

Résoudre l'équation suivante :

$$y'' - 3y' + 2y = e^x.$$

[Correction ▼](#)

[000863]

Exercice 3

Résoudre l'équation suivante :

$$y'' - y = -6 \cos x + 2x \sin x.$$

[Correction ▼](#)

[000864]

Exercice 4

Résoudre l'équation suivante :

$$4y'' + 4y' + 5y = \sin x e^{-x/2}.$$

[Correction ▼](#)

[000865]

Exercice 5

On considère l'équation :

$$y'' + 2y' + 4y = xe^x \quad (E)$$

1. Résoudre l'équation différentielle homogène associée à (E) .
2. Trouver une solution particulière de (E) (expliquer votre démarche), puis donner l'ensemble de toutes les solutions de (E) .
3. Déterminer l'unique solution h de (E) vérifiant $h(0) = 1$ et $h(1) = 0$.
4. Soit $f :]0, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$ une fonction deux fois dérivable sur $]0, \infty[$ et qui vérifie :

$$t^2 f''(t) + 3t f'(t) + 4f(t) = t \log t.$$

(a) On pose $g(x) = f(e^x)$, vérifier que g est solution de (E) .

(b) En déduire une expression de f .

[Correction ▼](#)

[000866]

Exercice 6

On considère l'équation différentielle suivante :

$$(E.D.) \quad y'' - 4y' + 4y = d(x),$$

où d est une fonction qui sera précisée plus loin.

1. Résoudre l'équation différentielle homogène (ou sans second membre) associée à $(E.D.)$.
2. Trouver une solution particulière de $(E.D.)$ lorsque $d(x) = e^{-2x}$ et lorsque $d(x) = e^{2x}$ respectivement.
3. Donner la forme générale des solutions de $(E.D.)$ lorsque

$$d(x) = \frac{e^{-2x} + e^{2x}}{4}.$$

[Correction ▼](#)

[000872]

Exercice 7

Résoudre : $y''(x) + 2y'(x) + y(x) = 2x \cos x \cosh x$.

[Correction ▼](#)

[000880]

Exercice 8

Déterminer les $f \in C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telles que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f''(x) + f(-x) = x \cos x.$$

[Correction ▼](#)

[000881]

Exercice 9

En posant $t = \arctan x$, résoudre :

$$y''(x) + \frac{2x}{1+x^2}y'(x) + \frac{y(x)}{(1+x^2)^2} = 0.$$

[Correction ▼](#)

[000884]

Exercice 10

Résoudre par le changement de fonction $z = \frac{y}{x}$ l'équation différentielle :

$$x^2 y''(x) - 2xy'(x) + (2 - x^2)y(x) = 0.$$

[Correction ▼](#)

[000885]

Correction de l'exercice 1 ▲

Le but de l'exercice est de résoudre l'équation

$$y'(x) - \frac{y(x)}{x} - y(x)^2 = -9x^2. \quad (\text{E})$$

1. Trouvons $a \in]0, \infty[$ tel que $y_0(x) = ax$ soit une solution particulière. Puisque

$$y_0'(x) - \frac{y_0(x)}{x} - y_0(x)^2 = -a^2x^2,$$

y_0 est solution si et seulement si $a = \pm 3$. On choisit $a = 3$.

2. Si z est une fonction \mathcal{C}^1 ne s'annulant pas, on pose $y(x) = 3x - 1/z(x)$. Alors y est solution si et seulement si

$$\frac{z'(x)}{z(x)^2} + \frac{1}{xz(x)} - \frac{1}{z(x)^2} + \frac{6x}{z(x)} = 0.$$

En multipliant par $z(x)^2$, on obtient que y est solution de (E) ssi z vérifie

$$z'(x) + \left(6x + \frac{1}{x}\right)z(x) = 1. \quad (\text{E}_1)$$

3. On résout (E₁) sur $]0, \infty[$. Une primitive de $x \mapsto 6x + 1/x$ est $x \mapsto 3x^2 + \ln(x)$, donc les solutions de l'équation homogène sont les $x \mapsto A \exp(-3x^2 - \ln(x))$. On cherche une solution particulière de (E₁) sous la forme $z_p(x) = \alpha(x) \exp(-3x^2 - \ln(x))$; alors z_p est solution si $\alpha'(x) \exp(-3x^2 - \ln(x)) = 1$, c'est-à-dire si $\alpha'(x) = x \exp(3x^2)$, par exemple si $\alpha(x) = \exp(3x^2)/6$. Les solutions de (E₁) sont donc les

$$z(x) = \frac{1 + A \exp(-3x^2)}{6x}, \quad \text{avec } A \in \mathbb{R}.$$

4. On va maintenant en déduire les solutions de (E) définies sur $]0, \infty[$.

Soit y une solution \mathcal{C}^1 définie sur $]0, \infty[$. On suppose dans un premier temps que $y(x) > 3x$ sur l'intervalle ouvert $I \subset]0, \infty[$, pris aussi grand que possible. Alors $y(x) = 3x - 1/z_I(x)$ pour une certaine fonction $z_I < 0$ qui est \mathcal{C}^1 sur I . D'après la question précédente, on a nécessairement $z_I(x) = [1 + A_I \exp(-3x^2)]/6x$ pour une certaine constante $A_I \in \mathbb{R}$. Puisque $z_I < 0$, cela impose $A_I < 0$, mais du coup $I \neq]0, +\infty[$ car $1 > A_I \exp(-3x^2)$ si x est assez grand.

Dans tous les cas, il existe donc un intervalle ouvert J tel que $y(x) < 3x$ sur J . On suppose encore que J est aussi grand que possible. Sur J , $y(x) = 3x - 1/z_J(x)$ pour une certaine fonction $z_J > 0$ qui est \mathcal{C}^1 sur J . Encore d'après la question précédente, $z_J(x) = [1 + A_J \exp(-3x^2)]/6x$ pour une certaine constante A_J . Puisque l'intervalle ouvert $J =]a, b[$ a été supposé maximal, et puisque y est supposée définie sur $]0, +\infty[$, si $a > 0$ on a $y(a) = 3a$ et de même si $b < \infty$, $y(b) = 3b$, car sinon par continuité de y on aurait encore $y(x) < 3x$ sur $]a - \varepsilon, b + \varepsilon[$ pour un petit $\varepsilon > 0$. Cela n'est possible respectivement que si $z_J(x) \rightarrow +\infty$ lorsque $x \rightarrow a$ ou $z_J(x) \rightarrow +\infty$ lorsque $x \rightarrow b$. Or on a dit que $z_J = [1 + A_J \exp(-3x^2)]/6x$, cela n'est donc pas possible du tout (sauf précisément si respectivement $a = 0$ et $b = 0$).

Donc soit $y(x) = 3x$ sur $]0, +\infty[$, soit $y(x) < 3x$ sur $]0, +\infty[$. Dans ce dernier cas, $z(x) = 1/(3x - y(x))$ est définie sur $]0, +\infty[$ et s'écrit $z(x) = [1 + A \exp(-3x^2)]/6x$. Puisque $z > 0$, nécessairement $A \geq -1$. Donc si y est solution, alors

$$y(x) = 3x \quad \text{ou} \quad y(x) = 3x - \frac{6x}{1 + A \exp(-3x^2)} \quad \text{avec } A \geq -1.$$

Réciproquement, si y est ainsi définie, alors y est définie et \mathcal{C}^1 sur $]0, \infty[$, et on peut vérifier que c'est bien une solution.

Correction de l'exercice 2 ▲

$y'' - 3y' + 2y = e^x$. Le polynôme caractéristique est $f(r) = (r-1)(r-2)$ et les solutions de l'équation homogène sont donc toutes les fonctions :

$$y(x) = c_1 e^x + c_2 e^{2x} \text{ avec } c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

On cherche une solution particulière de la forme $y_p(x) = P(x)e^x$, on est dans la situation (u) la condition (*) sur P est : $P'' - P' = 1$, et $P(x) = -x$ convient. Les solutions de l'équation sont donc les fonctions :

$$y(x) = (c_1 - x)e^x + c_2 e^{2x} \text{ avec } c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Correction de l'exercice 3 ▲

$y'' - y = -6\cos x + 2x\sin x$. Ici $f(r) = (r-1)(r+1)$ et l'équation homogène a pour solutions :

$$y(x) = c_1 e^x + c_2 e^{-x} \text{ avec } c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

On remarque que la fonction $3\cos x$ vérifie l'équation : $y'' - y = -6\cos x$, il nous reste donc à chercher une solution y_1 de l'équation $y'' - y = 2x\sin x$, car $y_p(x) = 3\cos x + y_1(x)$ sera une solution de l'équation considérée. Pour cela, on remarque que $2x\sin x = \text{Im}(2xe^{ix})$ et on utilise la méthode décrite plus haut pour trouver une solution z_1 de l'équation : $y'' - y = 2xe^{ix}$. On cherche z_1 sous la forme $P(x)e^{ix}$ où P est un polynôme de degré 1 car $f(i) = -2 \neq 0$. On a $f'(i) = 2i$, la condition (*) sur P est donc : $2iP'(x) - 2P(x) = 2x$ ce qui donne après identification $P(x) = -x - i$. Alors $y_1(x) = \text{Im}((-x+i)e^{ix}) = -x\sin x - \cos x$. Les solutions sont par conséquent les fonctions :

$$y(x) = c_1 e^x + c_2 e^{-x} + 2\cos x - x\sin x \text{ avec } c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Autre méthode pour trouver une solution de $y'' - y = 2x\sin x$: On la cherche de la forme $y_1(x) = A(x)\sin x + B(x)\cos x$ où A, B sont des polynômes de degré 1 car i n'est pas racine de l'équation caractéristique (*danger* : pour un second membre du type $Q(x)\sin(\beta x)e^{\alpha x}$ la discussion porte sur $\alpha + i\beta$ et non sur α ou β ...). On calcule y_1', y_1'' et on applique l'équation étudiée à y_1 ... on obtient la condition :

$$(A'' - A - 2B')\sin x + (B'' - B - 2A')\cos x = 2x\sin x$$

qui sera réalisée si :
$$\begin{cases} A'' - A - 2B' = 2x \\ B'' - B - 2A' = 0 \end{cases}$$

On écrit : $A(x) = ax + b$ et $B(x) = cx + d$, après identification on obtient : $a = d = -1, b = c = 0$, ce qui détermine y_1 .

Correction de l'exercice 4 ▲

La solution générale est de la forme

$$y(x) = K_1 \cos(x)e^{-x/2} + K_2 \sin(x)e^{-x/2} - \frac{1}{8}xe^{-x/2} \cos(x)$$

(K_1 et K_2 constantes réelles) et les conditions initiales donnent $K_1 = 0, K_2 = 1/8$.

Correction de l'exercice 5 ▲

1. Le polynôme caractéristique associé à E est : $p(x) = x^2 + 2x + 4$; son discriminant est $\Delta = -12$ et il a pour racines les 2 nombres complexes $-1 + i\sqrt{3}$ et $-1 - i\sqrt{3}$. Les solutions de l'équation homogène sont donc toutes fonctions :

$$y(x) = e^{-x}(a\cos\sqrt{3}x + b\sin\sqrt{3}x)$$

obtenues lorsque a, b décrivent \mathbb{R} .

2. Le second membre est de la forme $e^{\lambda x}Q(x)$ avec $\lambda = 1$ et $Q(x) = x$. On cherchera une solution de l'équation sous la forme : $y_p(x) = R(x)e^x$ avec R polynôme de degré égal à celui de Q puisque $p(1) \neq 0$. On pose donc $R(x) = ax + b$. On a

$$y_p''(x) + 2y_p'(x) + 4y_p(x) = (7ax + 7b + 4a)e^x.$$

Donc y_p est solution si et seulement si $7ax + 7a + 4b = x$. On trouve après identification des coefficients :

$$a = \frac{1}{7} \quad \text{et} \quad b = \frac{-4}{49}.$$

La fonction $y_p(x) = \frac{1}{7}(x - \frac{4}{7})e^x$ est donc solution de E et la forme générale des solutions de E est :

$$y(x) = e^{-x}(a \cos \sqrt{3}x + b \sin \sqrt{3}x) + \frac{1}{7}(x - \frac{4}{7})e^x ; a, b \in \mathbb{R}.$$

3. Soit h une solution de E . Les conditions $h(0) = 1, h(1) = 0$ sont réalisées ssi

$$a = \frac{53}{49} \quad \text{et} \quad b = -\frac{53 \cos \sqrt{3} + 3e^2}{49 \sin \sqrt{3}}.$$

4. (a) On a : $g'(x) = e^x f'(e^x)$ et $g''(x) = e^x f'(e^x) + e^{2x} f''(e^x)$ d'où pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$g''(x) + 2g'(x) + 4g(x) = e^{2x} f''(e^x) + 2e^x f'(e^x) + 4f(e^x) = e^x \log e^x = x e^x$$

donc g est solution de E .

(b) Réciproquement pour $f(t) = g(\log t)$ où g est une solution de E on montre que f est 2 fois dérivable et vérifie l'équation donnée en 4. Donc les fonctions f recherchées sont de la forme :

$$\frac{1}{t}(a \cos(\sqrt{3} \log t) + b \sin(\sqrt{3} \log t)) + \frac{t}{7}(\log t - \frac{4}{7}) ; a, b \in \mathbb{R}.$$

Correction de l'exercice 6 ▲

1. L'équation caractéristique $r^2 - 4r + 4 = 0$ a une racine (double) $r = 2$ donc les solutions de l'équation homogène sont les fonctions :

$$y(x) = (c_1 x + c_2) e^{2x} \text{ où } c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

2. Pour $d(x) = e^{-2x}$ on peut chercher une solution particulière de la forme : $y_1(x) = a e^{-2x}$ car -2 n'est pas racine de l'équation caractéristique. On a $y_1'(x) = -2e^{-2x}$ et $y_1''(x) = 4a e^{-2x}$. Par conséquent y_1 est solution si et seulement si :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad (4a - 4(-2a) + 4a) e^{-2x} = e^{-2x}$$

donc si et seulement si $a = \frac{1}{16}$.

Pour $d(x) = e^{2x}$ on cherche une solution de la forme $y_2(x) = a x^2 e^{2x}$, car 2 est racine double de l'équation caractéristique. On a $y_2'(x) = (2ax + 2ax^2) e^{2x}$ et $y_2''(x) = (2a + 4ax + 4ax + 4ax^2) e^{2x} = (4ax^2 + 8ax + 2a) e^{2x}$. Alors y_2 est solution si et seulement si

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad (4ax^2 + 8ax + 2a - 4(2ax + 2ax^2) + 4ax^2) e^{2x} = e^{2x}$$

donc si et seulement si $a = \frac{1}{2}$.

3. On déduit du principe de superposition que la fonction

$$y_p(x) = \frac{1}{4}(y_1(x) + y_2(x)) = \frac{1}{64} e^{-2x} + \frac{1}{8} x^2 e^{2x}$$

est solution de l'équation pour le second membre donné dans cette question, et la forme générale des solutions est alors :

$$y(x) = (c_1 x + c_2) e^{2x} + \frac{1}{64} e^{-2x} + \frac{1}{8} x^2 e^{2x} \text{ où } c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Correction de l'exercice 7 ▲

Réponse : $(\lambda x + \mu) e^{-x} + \frac{e^x}{25} [(3x - 4) \cos x - (4x - 2) \sin x] + (\sin x - x \cos x) e^{-x}$.

Correction de l'exercice 8 ▲

Réponse : $\frac{1}{2} (-x \cos x + \sin x) + \lambda \cos x + \mu \sinh x$.

Correction de l'exercice 9 ▲

Réponse : $x \rightarrow \frac{\lambda x + \mu}{\sqrt{1+x^2}}, (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.

Correction de l'exercice 10 ▲

Réponse : $x \rightarrow \lambda x \sinh x + \mu x \cosh x, (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.
