



Calculs d'intégrales

Fiche d'Arnaud Bodin, soigneusement relue par Chafiq Benhida

1 Utilisation de la définition

Exercice 1

Soit f la fonction définie sur $[0, 4]$ par

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x = 0 \\ 1 & \text{si } 0 < x < 1 \\ 3 & \text{si } x = 1 \\ -2 & \text{si } 1 < x \leq 2 \\ 4 & \text{si } 2 < x \leq 4. \end{cases}$$

1. Calculer $\int_0^4 f(t) dt$.
2. Soit $x \in [0, 4]$, calculer $F(x) = \int_0^x f(t) dt$.
3. Montrer que F est une fonction continue sur $[0, 4]$. La fonction F est-elle dérivable sur $[0, 4]$?

[Correction ▼](#) [Vidéo ■](#)

[002081]

Exercice 2

Soient les fonctions définies sur \mathbb{R} ,

$$f(x) = x, g(x) = x^2 \text{ et } h(x) = e^x,$$

Justifier qu'elles sont intégrables sur tout intervalle fermé borné de \mathbb{R} . En utilisant les sommes de Riemann, calculer les intégrales $\int_0^1 f(x)dx$, $\int_1^2 g(x)dx$ et $\int_0^x h(t)dt$.

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#) [Vidéo ■](#)

[002082]

Exercice 3

Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a, b]$ ($a < b$).

1. On suppose que $f(x) \geq 0$ pour tout $x \in [a, b]$, et que $f(x_0) > 0$ en un point $x_0 \in [a, b]$. Montrer que $\int_a^b f(x)dx > 0$. En déduire que : «si f est une fonction continue positive sur $[a, b]$ telle que $\int_a^b f(x)dx = 0$ alors f est identiquement nulle».
2. On suppose que $\int_a^b f(x)dx = 0$. Montrer qu'il existe $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = 0$.
3. Application : on suppose que f est une fonction continue sur $[0, 1]$ telle que $\int_0^1 f(x)dx = \frac{1}{2}$. Montrer qu'il existe $d \in [0, 1]$ tel que $f(d) = d$.

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#) [Vidéo ■](#)

[002085]

Exercice 4

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur \mathbb{R} et $F(x) = \int_0^x f(t)dt$. Répondre par vrai ou faux aux affirmations suivantes :

1. F est continue sur \mathbb{R} .
2. F est dérivable sur \mathbb{R} de dérivée f .
3. Si f est croissante sur \mathbb{R} alors F est croissante sur \mathbb{R} .
4. Si f est positive sur \mathbb{R} alors F est positive sur \mathbb{R} .
5. Si f est positive sur \mathbb{R} alors F est croissante sur \mathbb{R} .
6. Si f est T -périodique sur \mathbb{R} alors F est T -périodique sur \mathbb{R} .
7. Si f est paire alors F est impaire.

[Correction ▼](#) [Vidéo ■](#)

[002091]

2 Calculs de primitives

Exercice 5

Calculer les primitives suivantes par intégration par parties.

1. $\int x^2 \ln x dx$
2. $\int x \arctan x dx$
3. $\int \ln x dx$ puis $\int (\ln x)^2 dx$
4. $\int \cos x \exp x dx$

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#) [Vidéo ■](#)

[006864]

Exercice 6

Calculer les primitives suivantes par changement de variable.

1. $\int (\cos x)^{1234} \sin x dx$
2. $\int \frac{1}{x \ln x} dx$
3. $\int \frac{1}{3 + \exp(-x)} dx$
4. $\int \frac{1}{\sqrt{4x-x^2}} dx$

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#) [Vidéo ■](#)

[006865]

Exercice 7

Calculer les primitives suivantes, en précisant si nécessaire les intervalles de validité des calculs :

1. $\int \frac{x+2}{x^2-3x-4} dx$
2. $\int \frac{x-1}{x^2+x+1} dx$
3. $\int \sin^8 x \cos^3 x dx$
4. $\int \frac{1}{\sin x} dx$
5. $\int \frac{3-\sin x}{2\cos x+3\tan x} dx$

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#) [Vidéo ■](#)

[006866]

3 Calculs d'intégrales

Exercice 8

Calculer les intégrales suivantes :

1. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin x dx$ (intégration par parties)
2. $\int_0^1 \frac{e^x}{\sqrt{e^x+1}} dx$ (à l'aide d'un changement de variable simple)

3. $\int_0^1 \frac{1}{(1+x^2)^2} dx$ (changement de variable $x = \tan t$)
4. $\int_0^1 \frac{3x+1}{(x+1)^2} dx$ (décomposition en éléments simples)
5. $\int_{\frac{1}{2}}^2 \left(1 + \frac{1}{x^2}\right) \arctan x dx$ (changement de variable $u = \frac{1}{x}$)

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#) [Vidéo ■](#)

[006867]

Exercice 9

Calculer les intégrales suivantes :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1 + \sin x} dx \quad \text{et} \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{1 + \sin x} dx.$$

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#) [Vidéo ■](#)

[002095]

Exercice 10 Intégrales de Wallis

Soit $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x)^n dx$ pour $n \in \mathbb{N}$.

1. Montrer que $I_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} I_n$. Expliciter I_n . En déduire $\int_{-1}^1 (1-x^2)^n dx$.
2. Montrer que $(I_n)_n$ est positive décroissante. Montrer que $I_n \sim I_{n+1}$.
3. Simplifier $I_n \cdot I_{n+1}$. Montrer que $I_n \sim \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$. En déduire $\frac{1 \cdot 3 \cdots (2n+1)}{2 \cdot 4 \cdots (2n)} \sim 2\sqrt{\frac{n}{\pi}}$.

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#) [Vidéo ■](#)

[002096]

Exercice 11

Soit $I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx$.

1. En majorant la fonction intégrée, montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 0$.
2. Calculer $I_n + I_{n+1}$.
3. Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k+1}}{k} \right)$.

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#) [Vidéo ■](#)

[002097]

4 Applications : calculs d'aires, calculs de limites

Exercice 12

Calculer l'aire de la région délimitée par les courbes d'équation $y = \frac{x^2}{2}$ et $y = \frac{1}{1+x^2}$.

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#) [Vidéo ■](#)

[002099]

Exercice 13

Calculer l'aire intérieure d'une ellipse d'équation :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Indications. On pourra calculer seulement la partie de l'ellipse correspondant à $x \geq 0, y \geq 0$. Puis exprimer y en fonction de x . Enfin calculer une intégrale.

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#) [Vidéo ■](#)

[006863]

Exercice 14

Calculer la limite des suites suivantes :

$$1. u_n = n \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k^2 + n^2}$$

$$2. v_n = \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{k^2}{n^2}\right)^{\frac{1}{n}}$$

[Indication ▼](#)

[Correction ▼](#)

[Vidéo ■](#)

[002100]

Indication pour l'exercice 2 ▲

Les fonctions continues ne seraient-elles pas intégrables ?

Il faut se souvenir de ce que vaut la somme des n premiers entiers, la somme des carrés des n premiers entiers et la somme d'une suite géométrique. La formule générale pour les sommes de Riemann est que $\int_a^b f(x)dx$ est la limite (quand $n \rightarrow +\infty$) de

$$S_n = \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k \frac{b-a}{n}\right).$$

Indication pour l'exercice 3 ▲

1. Revenir à la définition de la continuité en x_0 en prenant $\varepsilon = \frac{f(x_0)}{2}$ par exemple.
2. Soit f est tout le temps de même signe (et alors utiliser la première question), soit ce n'est pas le cas (et alors utiliser un théorème classique...).
3. On remarquera que $\int_0^1 f(x) dx - \frac{1}{2} = \int_0^1 (f(x) - x) dx$.

Indication pour l'exercice 5 ▲

1. Pour $\int x^2 \ln x dx$ poser $v' = x^2$, $u = \ln x$.
2. Pour $\int x \arctan x dx$ poser $v' = x$ et $u = \arctan x$.
3. Pour les deux il faut faire une intégration par parties avec $v' = 1$.
4. Pour $\int \cos x \exp x dx$ il faut faire deux intégrations par parties.

Indication pour l'exercice 6 ▲

1. $\int \cos^{1234} x \sin x dx = -\frac{1}{1235} \cos^{1235} x + c$ (changement de variable $u = \cos x$)
2. $\int \frac{1}{x \ln x} dx = \ln |\ln x| + c$ (changement de variable $u = \ln x$)
3. $\int \frac{1}{3 + \exp(-x)} dx = \frac{1}{3} \ln(3 \exp x + 1) + c$ (changement de variable $u = \exp x$)
4. $\int \frac{1}{\sqrt{4x-x^2}} dx = \arcsin\left(\frac{1}{2}x - 1\right) + c$ (changement de variable $u = \frac{1}{2}x - 1$)

Indication pour l'exercice 7 ▲

1. $\int \frac{x+2}{x^2-3x-4} dx = -\frac{1}{5} \ln|x+1| + \frac{6}{5} \ln|x-4| + c$ (décomposition en éléments simples)
2. $\int \frac{x-1}{x^2+x+1} dx = \frac{1}{2} \ln|x^2+x+1| - \sqrt{3} \arctan\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x + \frac{1}{2}\right)\right) + c$
3. $\int \sin^8 x \cos^3 x dx = \frac{1}{9} \sin^9 x - \frac{1}{11} \sin^{11} x + c$
4. $\int \frac{1}{\sin x} dx = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1-\cos x}{1+\cos x} \right| + c = \ln \left| \tan \frac{x}{2} \right| + c$ (changement de variable $u = \cos x$ ou $u = \tan \frac{x}{2}$)
5. $\int \frac{3-\sin x}{2\cos x+3\tan x} dx = -\frac{1}{5} \ln|2-\sin x| + \frac{7}{5} \ln|1+2\sin x| + c$ (changement de variable $u = \sin x$)

Indication pour l'exercice 8 ▲

1. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin x dx = 1$ (intégration par parties $v' = \sin x$, $u = x$)
2. $\int_0^1 \frac{e^x}{\sqrt{e^x+1}} dx = 2\sqrt{e+1} - 2\sqrt{2}$ (à l'aide du changement de variable $u = e^x$)
3. $\int_0^1 \frac{1}{(1+x^2)^2} dx = \frac{\pi}{8} + \frac{1}{4}$ (changement de variable $x = \tan t$, $dx = (1 + \tan^2 t)dt$ et $1 + \tan^2 t = \frac{1}{\cos^2 t}$)
4. $\int_0^1 \frac{3x+1}{(x+1)^2} dx = 3 \ln 2 - 1$ (décomposition en éléments simples de la forme $\frac{3x+1}{(x+1)^2} = \frac{\alpha}{x+1} + \frac{\beta}{(x+1)^2}$)

5. $\int_{\frac{1}{2}}^2 \left(1 + \frac{1}{x^2}\right) \arctan x dx = \frac{3\pi}{4}$ (changement de variables $u = \frac{1}{x}$ et $\arctan x + \arctan \frac{1}{x} = \pm \frac{\pi}{2}$)

Indication pour l'exercice 9 ▲

$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1+\sin x} dx = 1$ (changement de variables $t = \tan \frac{x}{2}$).

$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{1+\sin x} dx = \frac{\pi}{2} - 1$ (utiliser la précédente).

Indication pour l'exercice 10 ▲

1. Faire une intégration par parties afin d'exprimer I_{n+2} en fonction de I_n . Pour le calcul explicite on distinguera le cas des n pairs et impairs.
 2. Rappel : $u_n \sim v_n$ est équivalent à $\frac{u_n}{v_n} \rightarrow 1$. Utiliser la décroissance de I_n pour encadrer $\frac{I_{n+1}}{I_n}$.
-

Indication pour l'exercice 11 ▲

1. Majorer par x^n .
 - 2.
 3. On pourra calculer $(I_0 + I_1) - (I_1 + I_2) + (I_2 + I_3) - \dots$
-

Indication pour l'exercice 12 ▲

Un dessin ne fait pas de mal ! Il faut ensuite résoudre l'équation $\frac{x^2}{2} = \frac{1}{x^2+1}$ puis calculer deux intégrales.

Indication pour l'exercice 13 ▲

Il faut se ramener au calcul de $\int_0^a b \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} dx$.

Indication pour l'exercice 14 ▲

On pourra essayer de reconnaître des sommes de Riemann, puis calculer des intégrales. Pour le produit composer par la fonction \ln , afin de transformer le produit en une somme.

Correction de l'exercice 1 ▲

1. On trouve $\int_0^4 f(t) dt = +7$. Il faut tout d'abord tracer le graphe de cette fonction. Ensuite la valeur d'une intégrale ne dépend pas de la valeur de la fonction en un point, c'est-à-dire ici les valeurs en $x = 0, x = 1, x = 2$ n'ont aucune influence sur l'intégrale. Ensuite on revient à la définition de $\int_0^4 f(t) dt$: pour la subdivision de $[0, 4]$ définie par $\{x_0 = 0, x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 3, x_4 = 4\}$, on trouve la valeur de l'intégrale (ici le sup et l'inf sont atteints et égaux pour cette subdivision et toute subdivision plus fine). Une autre façon de faire est considérer que f est une fonction en escalier (en «oubliant» les accidents en $x = 0, x = 1, x = 2$) dont on sait calculer l'intégrale.
2. C'est la même chose pour $\int_0^x f(t) dt$, mais au lieu d'aller jusqu'à 4 on s'arrête à x , on trouve

$$F(x) = \begin{cases} x & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 3 - 2x & \text{si } 1 < x \leq 2 \\ 4x - 9 & \text{si } 2 < x \leq 4. \end{cases}$$

3. Les seuls points à discuter pour la continuité sont les points $x = 1$ et $x = 2$, mais les limites à droite et à gauche de F sont égales en ces points donc F est continue. Par contre F n'est pas dérivable en $x = 1$ (les dérivées à droite et à gauche sont distinctes), F n'est pas non plus dérivable en $x = 2$.

Correction de l'exercice 2 ▲

Les fonctions sont continues donc intégrables !

1. En utilisant les sommes de Riemann, on sait que $\int_0^1 f(x) dx$ est la limite (quand $n \rightarrow +\infty$) de $\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(\frac{k}{n})$. Notons $S_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(\frac{k}{n})$. Alors $S_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{k}{n} = \frac{1}{n^2} \sum_{k=0}^{n-1} k = \frac{1}{n^2} \frac{n(n-1)}{2}$. On a utilisé que la somme des entiers de 0 à $n-1$ vaut $\frac{n(n-1)}{2}$. Donc S_n tend vers $\frac{1}{2}$. Donc $\int_0^1 f(x) dx = \frac{1}{2}$.
2. Même travail : $\int_1^2 g(x) dx$ est la limite de $S'_n = \frac{2-1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} g(1 + k\frac{2-1}{n}) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} (1 + \frac{k}{n})^2 = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} (1 + 2\frac{k}{n} + \frac{k^2}{n^2})$. En séparant la somme en trois nous obtenons : $S'_n = \frac{1}{n} (n + \frac{2}{n} \sum_{k=0}^{n-1} k + \frac{1}{n^2} \sum_{k=0}^{n-1} k^2) = 1 + \frac{2}{n^2} \frac{n(n-1)}{2} + \frac{1}{n^3} \frac{(n-1)n(2n-1)}{6}$. Donc à la limite on trouve $S'_n \rightarrow 1 + 1 + \frac{1}{3} = \frac{7}{3}$. Donc $\int_1^2 g(x) dx = 7/3$. Remarque : on a utilisé que la somme des carrés des entiers de 0 à $n-1$ est $\frac{(n-1)n(2n-1)}{6}$.
3. Même chose pour $\int_0^x h(t) dt$ qui est la limite de $S''_n = \frac{x}{n} \sum_{k=0}^{n-1} g(\frac{kx}{n}) = \frac{x}{n} \sum_{k=0}^{n-1} e^{\frac{kx}{n}} = \frac{x}{n} \sum_{k=0}^{n-1} (e^{\frac{x}{n}})^k$. Cette dernière somme est la somme d'une suite géométrique (si $x \neq 0$), donc $S''_n = \frac{x}{n} \frac{1 - (e^{\frac{x}{n}})^n}{1 - e^{\frac{x}{n}}} = \frac{x}{n} \frac{1 - e^x}{1 - e^{\frac{x}{n}}}$ qui tend vers $e^x - 1$. Pour obtenir cette dernière limite on remarque qu'en posant $u = \frac{x}{n}$ on a $\frac{x}{n} \frac{1 - e^x}{1 - e^{\frac{x}{n}}} = -1 / \frac{e^u - 1}{u}$ qui tend vers -1 lorsque $u \rightarrow 0$ (ce qui est équivalent à $n \rightarrow +\infty$).

Correction de l'exercice 3 ▲

1. Écrivons la continuité de f en x_0 avec $\varepsilon = \frac{f(x_0)}{2} > 0$: il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$ on ait $|f(x) - f(x_0)| \leq \varepsilon$. Avec notre choix de ε cela donne pour $x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$ que $f(x) \geq \frac{f(x_0)}{2}$. Pour évaluer $\int_a^b f(x) dx$ nous la coupons en trois morceaux par linéarité de l'intégrale :

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^{x_0 - \delta} f(x) dx + \int_{x_0 - \delta}^{x_0 + \delta} f(x) dx + \int_{x_0 + \delta}^b f(x) dx.$$

Comme f est positive alors par positivité de l'intégrale $\int_a^{x_0 - \delta} f(x) dx \geq 0$ et $\int_{x_0 + \delta}^b f(x) dx \geq 0$. Pour le terme du milieu on a $f(x) \geq \frac{f(x_0)}{2}$ donc $\int_{x_0 - \delta}^{x_0 + \delta} f(x) dx \geq \int_{x_0 - \delta}^{x_0 + \delta} \frac{f(x_0)}{2} dx = 2\delta \frac{f(x_0)}{2}$ (pour la dernière équation on calcule juste l'intégrale d'une fonction constante !). Le bilan de tout cela est que $\int_a^b f(x) dx \geq 2\delta \frac{f(x_0)}{2} > 0$.

Donc pour une fonction continue et positive f , si elle est strictement positive en un point alors $\int_a^b f(x) dx > 0$. Par contraposition pour une fonction continue et positive si $\int_a^b f(x) dx = 0$ alors f est identiquement nulle.

2. Soit f est tout le temps positive, soit elle tout le temps négative, soit elle change (au moins un fois) de signe. Dans le premier cas f est identiquement nulle par la première question, dans le second cas c'est pareil (en appliquant la première question à $-f$). Pour le troisième cas le théorème des valeurs intermédiaires affirme qu'il existe c tel que $f(c) = 0$.
3. Posons $g(x) = f(x) - x$. Alors $\int_0^1 g(x)dx = \int_0^1 (f(x) - x)dx = \int_0^1 f(x)dx - \frac{1}{2} = 0$. Donc par la question précédente, g étant continue, il existe $d \in [0, 1]$ tel que $g(d) = 0$, ce qui est équivalent à $f(d) = d$.

Correction de l'exercice 4 ▲

1. Vrai.
2. Vrai.
3. Faux ! Attention aux valeurs négatives par exemple pour $f(x) = x$ alors F est décroissante sur $] -\infty, 0]$ et croissante sur $[0, +\infty[$.
4. Faux. Attention aux valeurs négatives par exemple pour $f(x) = x^2$ alors F est négative sur $] -\infty, 0]$ et positive sur $[0, +\infty[$.
5. Vrai.
6. Faux. Faire le calcul avec la fonction $f(x) = 1 + \sin(x)$ par exemple.
7. Vrai.

Correction de l'exercice 5 ▲

1. $\int x^2 \ln x dx$

Considérons l'intégration par parties avec $u = \ln x$ et $v' = x^2$. On a donc $u' = \frac{1}{x}$ et $v = \frac{x^3}{3}$. Donc

$$\begin{aligned} \int \ln x \times x^2 dx &= \int uv' = [uv] - \int u'v \\ &= \left[\ln x \times \frac{x^3}{3} \right] - \int \frac{1}{x} \times \frac{x^3}{3} dx \\ &= \left[\ln x \times \frac{x^3}{3} \right] - \int \frac{x^2}{3} dx \\ &= \frac{x^3}{3} \ln x - \frac{x^3}{9} + c \end{aligned}$$

2. $\int x \arctan x dx$

Considérons l'intégration par parties avec $u = \arctan x$ et $v' = x$. On a donc $u' = \frac{1}{1+x^2}$ et $v = \frac{x^2}{2}$. Donc

$$\begin{aligned} \int \arctan x \times x dx &= \int uv' = [uv] - \int u'v \\ &= \left[\arctan x \times \frac{x^2}{2} \right] - \int \frac{1}{1+x^2} \times \frac{x^2}{2} dx \\ &= \left[\arctan x \times \frac{x^2}{2} \right] - \frac{1}{2} \int \left(1 - \frac{1}{1+x^2} \right) dx \\ &= \frac{x^2}{2} \arctan x - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} \arctan x + c \\ &= \frac{1}{2}(1+x^2) \arctan x - \frac{1}{2}x + c \end{aligned}$$

3. $\int \ln x dx$ puis $\int (\ln x)^2 dx$

Pour la primitive $\int \ln x dx$, regardons l'intégration par parties avec $u = \ln x$ et $v' = 1$. Donc $u' = \frac{1}{x}$ et $v = x$.

$$\begin{aligned}\int \ln x dx &= \int uv' = [uv] - \int u'v \\ &= [\ln x \times x] - \int \frac{1}{x} \times x dx \\ &= [\ln x \times x] - \int 1 dx \\ &= x \ln x - x + c\end{aligned}$$

Par la primitive $\int (\ln x)^2 dx$ soit l'intégration par parties définie par $u = (\ln x)^2$ et $v' = 1$. Donc $u' = 2\frac{1}{x} \ln x$ et $v = x$.

$$\begin{aligned}\int (\ln x)^2 dx &= \int uv' = [uv] - \int u'v \\ &= [x(\ln x)^2] - 2 \int \ln x dx \\ &= x(\ln x)^2 - 2(x \ln x - x) + c\end{aligned}$$

Pour obtenir la dernière ligne on a utilisé la primitive calculée précédemment.

4. Notons $I = \int \cos x \exp x dx$.

Regardons l'intégration par parties avec $u = \exp x$ et $v' = \cos x$. Alors $u' = \exp x$ et $v = \sin x$.

Donc

$$I = \int \cos x \exp x dx = [\sin x \exp x] - \int \sin x \exp x dx$$

Si l'on note $J = \int \sin x \exp x dx$, alors on a obtenu

$$I = [\sin x \exp x] - J \tag{1}$$

Pour calculer J on refait une deuxième intégration par parties avec $u = \exp x$ et $v' = \sin x$. Ce qui donne

$$J = \int \sin x \exp x dx = [-\cos x \exp x] - \int -\cos x \exp x dx = [-\cos x \exp x] + I$$

Nous avons ainsi une deuxième équation :

$$J = [-\cos x \exp x] + I \tag{2}$$

Repartons de l'équation (1) dans laquelle on remplace J par la formule obtenue dans l'équation (2).

$$I = [\sin x \exp x] - J = [\sin x \exp x] - [-\cos x \exp x] - I$$

D'où

$$2I = [\sin x \exp x] + [\cos x \exp x]$$

Ce qui nous permet de calculer notre intégrale :

$$I = \frac{1}{2}(\sin x + \cos x) \exp x + c.$$

1. $\int (\cos x)^{1234} \sin x dx$

En posant le changement de variable $u = \cos x$ on a $x = \arccos u$ et $du = -\sin x dx$ et on obtient

$$\int (\cos x)^{1234} \sin x dx = \int u^{1234} (-du) = -\frac{1}{1235} u^{1235} + c = -\frac{1}{1235} (\cos x)^{1235} + c$$

Cette primitive est définie sur \mathbb{R} .

2. $\int \frac{1}{x \ln x} dx$

En posant le changement de variable $u = \ln x$ on a $x = \exp u$ et $du = \frac{dx}{x}$ on écrit :

$$\int \frac{1}{x \ln x} dx = \int \frac{1}{\ln x} \frac{dx}{x} = \int \frac{1}{u} du = \ln |u| + c = \ln |\ln x| + c$$

Cette primitive est définie sur $]0, 1[$ ou sur $]1, +\infty[$ (la constante peut être différente pour chacun des intervalles).

3. $\int \frac{1}{3 + \exp(-x)} dx$

Soit le changement de variable $u = \exp x$. Alors $x = \ln u$ et $du = \exp x dx$ ce qui s'écrit aussi $dx = \frac{du}{u}$.

$$\int \frac{1}{3 + \exp(-x)} dx = \int \frac{1}{3 + \frac{1}{u}} \frac{du}{u} = \int \frac{1}{3u + 1} du = \frac{1}{3} \ln |3u + 1| + c = \frac{1}{3} \ln (3 \exp x + 1) + c$$

Cette primitive est définie sur \mathbb{R} .

4. $\int \frac{1}{\sqrt{4x - x^2}} dx$

Le changement de variable a pour but de se ramener à quelque chose de connu. Ici nous avons une fraction avec une racine carrée au dénominateur et sous la racine un polynôme de degré 2. Ce que l'on sait intégrer c'est

$$\int \frac{1}{\sqrt{1 - u^2}} du = \arcsin u + c,$$

car on connaît la dérivée de la fonction $\arcsin(t)$ c'est $\arcsin'(t) = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$. On va donc essayer de s'y ramener. Essayons d'écrire ce qu'il y a sous la racine, $4x - x^2$ sous la forme $1 - t^2$: $4x - x^2 = 4 - (x - 2)^2 = 4 \left(1 - \left(\frac{1}{2}x - 1\right)^2 \right)$. Donc il est naturel d'essayer le changement de variable $u = \frac{1}{2}x - 1$ pour lequel $4x - x^2 = 4(1 - u^2)$ et $dx = 2du$.

$$\int \frac{1}{\sqrt{4x - x^2}} dx = \int \frac{1}{\sqrt{4(1 - u^2)}} 2du = \int \frac{du}{\sqrt{1 - u^2}} = \arcsin u + c = \arcsin \left(\frac{1}{2}x - 1 \right) + c$$

La fonction $\arcsin u$ est définie et dérivable pour $u \in]-1, 1[$ alors cette primitive est définie sur $x \in]0, 4[$.

Correction de l'exercice 7 ▲

1. $\int \frac{x+2}{x^2-3x-4} dx$

Pour calculer cette intégrale on décompose la fraction $\frac{x+2}{x^2-3x-4}$ en éléments simples, le dénominateur n'étant pas irréductible. On sait que cette fraction rationnelle se décompose avec des dénominateurs de degré 1 et des constantes aux numérateurs :

$$\frac{x+2}{x^2-3x-4} = \frac{x+2}{(x+1)(x-4)} = \frac{\alpha}{x+1} + \frac{\beta}{x-4}$$

Il ne reste plus qu'à calculer α et β à l'aide de votre méthode favorite :

$$\frac{x+2}{x^2-3x-4} = \frac{-\frac{1}{5}}{x+1} + \frac{\frac{6}{5}}{x-4}$$

Chacune de ces fractions est du type $\frac{1}{u}$ qui s'intègre en $\ln |u|$, d'où :

$$\int \frac{x+2}{x^2-3x-4} dx = -\frac{1}{5} \int \frac{1}{x+1} dx + \frac{6}{5} \int \frac{1}{x-4} dx = -\frac{1}{5} \ln |x+1| + \frac{6}{5} \ln |x-4| + c$$

Cette primitive est définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-1, 4\}$

$$2. \int \frac{x-1}{x^2+x+1} dx$$

Le dénominateur $u = x^2 + x + 1$ est irréductible, la fraction est donc déjà décomposée en éléments simples. On fait apparaître artificiellement une fraction du type $\frac{u'}{u}$ qui s'intégrera à l'aide du logarithme :

$$\frac{x-1}{x^2+x+1} = \frac{1}{2} \frac{2x+1}{x^2+x+1} - \frac{3}{2} \frac{1}{x^2+x+1}$$

Chacune de ces fractions s'intègre, la première est du type $\frac{u'}{u}$ dont une primitive sera $\ln|u|$, la deuxième sera du type $\frac{1}{1+v^2}$ dont une primitive est $\arctan v$.

En détails cela donne :

$$\begin{aligned} \int \frac{x-1}{x^2+x+1} dx &= \int \frac{1}{2} \frac{2x+1}{x^2+x+1} dx - \frac{3}{2} \int \frac{1}{x^2+x+1} dx \\ &= \frac{1}{2} [\ln|x^2+x+1|] - \frac{3}{2} \int \frac{1}{\frac{3}{4} + \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x+\frac{1}{2}\right)\right)^2} dx \\ &= \frac{1}{2} [\ln|x^2+x+1|] - 2 \int \frac{1}{1+v^2} \frac{\sqrt{3}}{2} dv \quad \text{en posant } v = \frac{2}{\sqrt{3}} \left(x + \frac{1}{2}\right) \\ &= \frac{1}{2} [\ln|x^2+x+1|] - \sqrt{3} [\arctan v] \\ &= \frac{1}{2} \ln|x^2+x+1| - \sqrt{3} \arctan \left(\frac{2}{\sqrt{3}} \left(x + \frac{1}{2}\right) \right) + c \end{aligned}$$

Cette primitive est définie sur \mathbb{R} .

$$3. \int \sin^8 x \cos^3 x dx$$

Lorsque l'on a une fonction qui s'exprime comme un polynôme (ou une fraction rationnelle), on peut tester un des changements de variable $u = \cos x$, $u = \sin x$ ou $u = \tan x$. Soit vous essayez les trois, soit vous appliquez les règles de Bioche. Ici, si l'on change x en $\pi - x$ alors $\sin^8 x \cos^3 x dx$ devient $\sin^8(\pi - x) \cos^3(\pi - x) d(\pi - x) = \sin^8 x (-\cos^3 x)(-dx) = \sin^8 x \cos^3 x dx$. Donc le changement de variable adéquat est $u = \sin x$.

Posons $u = \sin x$, $du = \cos x dx$.

$$\begin{aligned} \int \sin^8 x \cos^3 x dx &= \int \sin^8 x \cos^2 x (\cos x dx) = \int \sin^8 x (1 - \sin^2 x) (\cos x dx) \\ &= \int u^8 (1 - u^2) du = \int u^8 du - \int u^{10} du \\ &= \left[\frac{1}{9} u^9 \right] - \left[\frac{1}{11} u^{11} \right] = \frac{1}{9} \sin^9 x - \frac{1}{11} \sin^{11} x + c \end{aligned}$$

Cette primitive est définie sur \mathbb{R} .

$$4. \int \frac{1}{\sin x} dx$$

Comme $\frac{1}{\sin(-x)}(-dx) = \frac{1}{\sin x} dx$ la règle de Bioche nous indique le changement de variable $u = \cos x$. Donc $du = -\sin x dx$.

Donc

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{\sin x} dx &= \int \frac{-1}{\sin^2 x} (-\sin x dx) \\ &= \int \frac{-1}{1 - \cos^2 x} (-\sin x dx) \\ &= - \int \frac{1}{1 - u^2} du \end{aligned}$$

On décompose cette fraction en éléments simples : $\frac{1}{1-u^2} = \frac{1}{2} \frac{1}{1+u} + \frac{1}{2} \frac{1}{1-u}$. Donc

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{\sin x} dx &= -\frac{1}{2} \int \frac{1}{1+u} du - \frac{1}{2} \int \frac{1}{1-u} du \\ &= -\frac{1}{2} [\ln|1+u|] - \frac{1}{2} [\ln|1-u|] \\ &= -\frac{1}{2} \ln|1+\cos x| - \frac{1}{2} \ln|1-\cos x| + c \end{aligned}$$

Cette primitive est définie sur tout intervalle du type $]k\pi, (k+1)\pi[$, $k \in \mathbb{Z}$. Elle peut se réécrire sous différentes formes :

$$\int \frac{1}{\sin x} dx = \frac{1}{2} \ln \frac{1-\cos x}{1+\cos x} + c = \ln \left| \tan \frac{x}{2} \right| + c$$

Un autre changement de variable possible aurait été $t = \tan \frac{x}{2}$.

5. $\int \frac{3-\sin x}{2\cos x+3\tan x} dx$

La règle de Bioche nous indique le changement de variable $u = \sin x$, $du = \cos x dx$.

$$\begin{aligned} \int \frac{3-\sin x}{2\cos x+3\tan x} dx &= \int \frac{3-\sin x}{2\cos x+3\tan x} \frac{1}{\cos x} (\cos x dx) \\ &= \int \frac{3-\sin x}{2\cos^2 x+3\sin x} (\cos x dx) \\ &= \int \frac{3-\sin x}{2-2\sin^2 x+3\sin x} (\cos x dx) \\ &= \int \frac{3-u}{2-2u^2+3u} du \end{aligned}$$

Occupons nous de la fraction que l'on réduit en éléments simples :

$$\frac{3-u}{2-2u^2+3u} = \frac{u-3}{(u-2)(2u+1)} = \frac{\alpha}{u-2} + \frac{\beta}{2u+1}$$

On trouve $\alpha = -\frac{1}{5}$ et $\beta = \frac{7}{5}$.

Ainsi

$$\begin{aligned} \int \frac{3-\sin x}{2\cos x+3\tan x} dx &= \int \frac{\alpha du}{u-2} + \int \frac{\beta du}{2u+1} \\ &= \alpha \ln|u-2| + \beta \ln|2u+1| + c \\ &= -\frac{1}{5} \ln|2-\sin x| + \frac{7}{5} \ln|1+2\sin x| + c \end{aligned}$$

Cette primitive est définie pour les x vérifiant $1+2\sin x > 0$ donc sur tout intervalle du type $]-\frac{\pi}{6} + 2k\pi, \frac{7\pi}{6} + 2k\pi[$, $k \in \mathbb{Z}$.

Correction de l'exercice 8 ▲

1. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin x dx$

Par intégration par parties avec $u = x$, $v' = \sin x$:

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin x dx &= [uv]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} u'v \\ &= [-x \cos x]_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx \\ &= [-x \cos x]_0^{\frac{\pi}{2}} + [\sin x]_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= 0 - 0 + 1 - 0 \\ &= 1 \end{aligned}$$

2. $\int_0^1 \frac{e^x}{\sqrt{e^x+1}} dx$

Posons le changement de variable $u = e^x$ avec $x = \ln u$ et $du = e^x dx$. La variable x varie de $x = 0$ à $x = 1$, donc la variable $u = e^x$ varie de $u = 1$ à $u = e$.

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{e^x dx}{\sqrt{e^x+1}} &= \int_1^e \frac{du}{\sqrt{u+1}} \\ &= [2\sqrt{u+1}]_1^e \\ &= 2\sqrt{e+1} - 2\sqrt{2} \end{aligned}$$

3. $\int_0^1 \frac{1}{(1+x^2)^2} dx$

Posons le changement de variable $x = \tan t$, alors on a $dx = (1 + \tan^2 t)dt$, $t = \arctan x$ et on sait aussi que $1 + \tan^2 t = \frac{1}{\cos^2 t}$. Comme x varie de $x = 0$ à $x = 1$ alors t doit varier de $t = \arctan 0 = 0$ à $t = \arctan 1 = \frac{\pi}{4}$.

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{1}{(1+x^2)^2} dx &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{(1 + \tan^2 t)^2} (1 + \tan^2 t) dt \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dt}{1 + \tan^2 t} \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 t dt \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\cos(2t) + 1) dt \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2} \sin(2t) + t \right]_0^{\frac{\pi}{4}} \\ &= \frac{1}{4} + \frac{\pi}{8} \end{aligned}$$

4. $\int_0^1 \frac{3x+1}{(x+1)^2} dx$

Commençons par décomposer la fraction en éléments simples :

$$\frac{3x+1}{(x+1)^2} = \frac{\alpha}{x+1} + \frac{\beta}{(x+1)^2} = \frac{3}{x+1} - \frac{2}{(x+1)^2}$$

où l'on a trouvé $\alpha = 3$ et $\beta = -2$. La première est une intégrale du type $\int \frac{1}{u} = [\ln|u|]$ et la seconde $\int \frac{1}{u^2} = [-\frac{1}{u}]$.

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{3x+1}{(x+1)^2} dx &= 3 \int_0^1 \frac{1}{x+1} dx - 2 \int_0^1 \frac{1}{(x+1)^2} dx \\
&= 3 \left[\ln|x+1| \right]_0^1 - 2 \left[-\frac{1}{x+1} \right]_0^1 \\
&= 3 \ln 2 - 0 + 1 - 2 \\
&= 3 \ln 2 - 1
\end{aligned}$$

5. Notons $I = \int_{\frac{1}{2}}^2 \left(1 + \frac{1}{x^2}\right) \arctan x dx$.

Posons le changement de variable $u = \frac{1}{x}$ et on a $x = \frac{1}{u}$, $dx = -\frac{du}{u^2}$. Alors x variant de $x = \frac{1}{2}$ à $x = 2$, u varie lui de $u = 2$ à $u = \frac{1}{2}$ (l'ordre est important !).

$$\begin{aligned}
I &= \int_{\frac{1}{2}}^2 \left(1 + \frac{1}{x^2}\right) \arctan x dx \\
&= \int_2^{\frac{1}{2}} (1 + u^2) \arctan \frac{1}{u} \left(-\frac{du}{u^2}\right) \\
&= \int_{\frac{1}{2}}^2 \left(\frac{1}{u^2} + 1\right) \arctan \frac{1}{u} du \\
&= \int_{\frac{1}{2}}^2 \left(\frac{1}{u^2} + 1\right) \left(\frac{\pi}{2} - \arctan u\right) du \quad \text{car} \quad \arctan u + \arctan \frac{1}{u} = \frac{\pi}{2} \\
&= \frac{\pi}{2} \int_{\frac{1}{2}}^2 \left(\frac{1}{u^2} + 1\right) du - \int_{\frac{1}{2}}^2 \left(\frac{1}{u^2} + 1\right) \arctan u du \\
&= \frac{\pi}{2} \left[-\frac{1}{u} + u\right]_{\frac{1}{2}}^2 - I \\
&= \frac{3\pi}{2} - I
\end{aligned}$$

Conclusion : $I = \frac{3\pi}{4}$.

Correction de l'exercice 9 ▲

1. Notons $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1+\sin x} dx$. Le changement de variable $t = \tan \frac{x}{2}$ transforme toute fraction rationnelle de sinus et cosinus en une fraction rationnelle en t (que l'on sait résoudre !).

En posant $t = \tan \frac{x}{2}$ on a $x = \arctan \frac{t}{2}$ ainsi que les formules suivantes :

$$\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad \sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \tan x = \frac{2t}{1-t^2}, \quad dx = \frac{2dt}{1+t^2}.$$

Ici, on a seulement à remplacer $\sin x$. Comme x varie de $x = 0$ à $x = \frac{\pi}{2}$ alors $t = \tan \frac{x}{2}$ varie de $t = 0$ à $t = 1$.

$$\begin{aligned}
I &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1+\sin x} dx = \int_0^1 \frac{1}{1 + \frac{2t}{1+t^2}} \frac{2dt}{1+t^2} \\
&= \int_0^1 \frac{2}{1+t^2+2t} dt = \int_0^1 \frac{2}{(1+t)^2} dt \\
&= \left[\frac{-2}{1+t} \right]_0^1 = 1
\end{aligned}$$

2. Notons $J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{1+\sin x} dx$. Alors

$$I + J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1+\sin x} dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{1+\sin x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\sin x}{1+\sin x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 dx = [x]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2}.$$

Donc $J = \frac{\pi}{2} - I = \frac{\pi}{2} - 1$.

Correction de l'exercice 10 ▲

1. (a)

$$I_{n+2} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n+1} x \cdot \sin x dx.$$

En posant $u(x) = \sin^{n+1} x$ et $v'(x) = \sin x$ et en intégrant par parties nous obtenons

$$\begin{aligned} I_{n+2} &= \left[-\cos x \sin^{n+1} x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} + (n+1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x \sin^n x dx \\ &= 0 + (n+1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sin^2 x) \sin^n x dx \\ &= (n+1)I_n - (n+1)I_{n+2}. \end{aligned}$$

Donc $(n+2)I_{n+2} = (n+1)I_n$. Conclusion

$$I_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} I_n.$$

(b) Nous avons donc une formule de récurrence pour I_n qui s'exprime en fonction de I_{n-2} qui a son tour s'exprime en fonction de I_{n-4} , etc. On se ramène ainsi à l'intégrale de I_0 (si n est pair) ou bien de I_1 (si n est impair). Un petit calcul donne $I_0 = \frac{\pi}{2}$ et $I_1 = 1$. Par récurrence nous avons donc pour n pair :

$$I_n = \frac{1 \cdot 3 \cdots (n-1)}{2 \cdot 4 \cdots n} \frac{\pi}{2},$$

et pour n impair :

$$I_n = \frac{2 \cdot 4 \cdots (n-1)}{1 \cdot 3 \cdots n}.$$

(c) Pour calculer $\int_{-1}^1 (1-x^2)^n dx$ nous allons nous ramener à une intégrale de Wallis. Avec le changement de variable $x = \cos u$, on montre assez facilement que :

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 (1-x^2)^n dx &= 2 \int_0^1 (1-x^2)^n dx \\ &= 2 \int_{\frac{\pi}{2}}^0 (1-\cos^2 u)^n (-\sin u du) \quad \text{avec } x = \cos u \\ &= 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+1} u du \\ &= 2I_{2n+1} \end{aligned}$$

2. (a) Sur $[0, \frac{\pi}{2}]$ la fonction sinus est positive donc I_n est positive. De plus, sur ce même intervalle $\sin x \leq 1$ donc $(\sin x)^{n+1} \leq (\sin x)^n$. Cela implique

$$I_{n+1} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x)^{n+1} dx \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x)^n dx = I_n.$$

- (b) Comme (I_n) est décroissante alors $I_{n+2} \leq I_{n+1} \leq I_n$, en divisant le tout par $I_n > 0$ nous obtenons $\frac{I_{n+2}}{I_n} \leq \frac{I_{n+1}}{I_n} \leq 1$. Mais nous avons déjà calculé $\frac{I_{n+2}}{I_n} = \frac{n+1}{n+2}$ qui tend vers 1 quand n tend vers l'infini. Donc $\frac{I_{n+1}}{I_n}$ tend vers +1 donc $I_n \sim I_{n+1}$.
3. (a) Nous allons calculer $I_n \cdot I_{n+1}$. Supposons par exemple que n est pair, alors par les formules obtenues précédemment :

$$I_n \times I_{n+1} = \frac{1 \cdot 3 \cdots (n-1)}{2 \cdot 4 \cdots n} \frac{\pi}{2} \times \frac{2 \cdot 4 \cdots n}{1 \cdot 3 \cdots (n+1)} = \frac{\pi}{2} \times \frac{1}{n+1}.$$

Si n est impair nous obtenons la même fraction. On en déduit que pour tout n : $I_n \cdot I_{n+1} = \frac{\pi}{2(n+1)}$.

- (b) Maintenant

$$I_n^2 = I_n \cdot I_n \sim I_n \cdot I_{n+1} = \frac{\pi}{2(n+1)} \sim \frac{\pi}{2n},$$

donc

$$I_n \sim \sqrt{\frac{\pi}{2n}}.$$

- (c)

$$\frac{1 \cdot 3 \cdots (2n+1)}{2 \cdot 4 \cdots (2n)} = I_{2n} \cdot (2n+1) \cdot \frac{2}{\pi} \sim \sqrt{\frac{\pi}{4n}} \cdot (2n+1) \cdot \frac{2}{\pi} \sim 2\sqrt{\frac{n}{\pi}}.$$

Correction de l'exercice 11 ▲

1. Pour $x > 0$ on a $\frac{x^n}{1+x} \leq x^n$, donc

$$I_n \leq \int_0^1 x^n dx = \left[\frac{1}{n+1} x^{n+1} \right]_0^1 = \frac{1}{n+1}.$$

Donc $I_n \rightarrow 0$ lorsque $n \rightarrow +\infty$.

2. $I_n + I_{n+1} = \int_0^1 x^n \frac{1+x}{1+x} dx = \int_0^1 x^n dx = \frac{1}{n+1}$.
3. Soit $S_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots \pm \frac{1}{n} = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k+1}}{k}$. Par la question précédente nous avons $S_n = (I_0 + I_1) - (I_1 + I_2) + (I_2 + I_3) - \cdots \pm (I_{n-1} + I_n)$. Mais d'autre part cette somme étant télescopique cela conduit à $S_n = I_0 \pm I_n$. Alors la limite de S_n et donc de $\sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k+1}}{k}$ (quand $n \rightarrow +\infty$) est I_0 car $I_n \rightarrow 0$. Un petit calcul montre que $I_0 = \int_0^1 \frac{dx}{1+x} = \ln 2$. Donc la somme alternée des inverses des entiers converge vers $\ln 2$.

Correction de l'exercice 12 ▲

La courbe d'équation $y = x^2/2$ est une parabole, la courbe d'équation $y = \frac{1}{1+x^2}$ est une courbe en cloche. Dessinez les deux graphes. Ces deux courbes délimitent une région dont nous allons calculer l'aire. Tout d'abord ces deux courbes s'intersectent aux points d'abscisses $x = +1$ et $x = -1$: cela se devine sur le graphique puis se vérifie en résolvant l'équation $\frac{x^2}{2} = \frac{1}{x^2+1}$.

Nous allons calculer deux aires :

- L'aire \mathcal{A}_1 de la région sous la parabole, au-dessus de l'axe des abscisses et entre les droites d'équation $(x = -1)$ et $(x = +1)$. Alors

$$\mathcal{A}_1 = \int_{-1}^{+1} \frac{x^2}{2} dx = \left[\frac{x^3}{6} \right]_{-1}^{+1} = \frac{1}{3}.$$

- L'aire \mathcal{A}_2 de la région sous la cloche, au-dessus de l'axe des abscisses et entre les droites d'équation $(x = -1)$ et $(x = +1)$. Alors

$$\mathcal{A}_2 = \int_{-1}^{+1} \frac{1}{x^2+1} dx = [\arctan x]_{-1}^{+1} = \frac{\pi}{2}.$$

— L'aire \mathcal{A} sous la cloche et au-dessus de la parabole vaut maintenant

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}_2 - \mathcal{A}_1 = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{3}.$$

Correction de l'exercice 13 ▲

Calculons seulement un quart de l'aire : la partie du quadrant $x \geq 0, y \geq 0$. Pour ce quadrant les points de l'ellipse ont une abscisse x qui vérifie $0 \leq x \leq a$. Et la relation $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ donne $y = b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}$.

Nous devons donc calculer l'aire sous la courbe d'équation $y = b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}$, au-dessus de l'axe des abscisses et entre les droites d'équations ($x = 0$) et ($x = a$) (faites un dessin !).

Cette aire vaut donc : $\int_0^a b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} dx$. Nous allons calculer cette intégrale à l'aide du changement de variable $x = a \cos u$ qui donne $dx = -a \sin u du$. La variable x variant de $x = 0$ à $x = a$ alors la nouvelle variable u varie de $u = \frac{\pi}{2}$ (pour lequel on a bien $a \cos \frac{\pi}{2} = 0$) à $u = 0$ (pour lequel on a bien $a \cos 0 = a$). Autrement dit la fonction $u \mapsto a \cos u$ est une bijection de $[\frac{\pi}{2}, 0]$ vers $[0, a]$.

$$\begin{aligned} \int_0^a b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} dx &= \int_{\frac{\pi}{2}}^0 b\sqrt{1 - \cos^2 u} (-a \sin u du) \quad \text{en posant } x = a \cos u \\ &= \int_{\frac{\pi}{2}}^0 b \sin u (-a \sin u du) \\ &= ab \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 u du \\ &= ab \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 - \cos(2u)}{2} du \\ &= ab \left[\frac{u}{2} - \frac{\sin(2u)}{4} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \frac{\pi ab}{4} \end{aligned}$$

L'aire d'un quart d'ellipse est donc $\frac{\pi ab}{4}$.

Conclusion : l'aire d'une ellipse est πab , où a et b sont les longueurs des demi-axes. Si $a = b = r$ on retrouve que l'aire d'un disque de rayon r est πr^2 .

Correction de l'exercice 14 ▲

1. Soit

$$u_n = n \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k^2 + n^2} = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{1 + \left(\frac{k}{n}\right)^2}.$$

En posant $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ nous venons d'écrire la somme de Riemann correspondant à $\int_0^1 f(x) dx$. Cette intégrale se calcule facilement :

$$\int_0^1 f(t) dt = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = [\arctan x]_0^1 = \frac{\pi}{4}.$$

La somme de Riemann u_n convergeant vers $\int_0^1 f(x) dx$ nous venons de montrer que (u_n) converge vers $\frac{\pi}{4}$.

2. Soit $v_n = \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{k^2}{n^2}\right)^{\frac{1}{n}}$, notons

$$w_n = \ln v_n = \sum_{k=1}^n \ln \left(\left(1 + \frac{k^2}{n^2}\right)^{\frac{1}{n}} \right) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \ln \left(1 + \frac{k^2}{n^2}\right).$$

En posant $g(x) = \ln(1+x^2)$ nous reconnaissons la somme de Riemann correspondant à $I = \int_0^1 g(x)dx$.
Calculons cette intégrale :

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 g(x)dx = \int_0^1 \ln(1+x^2)dx \\ &= [x\ln(1+x^2)]_0^1 - \int_0^1 x \frac{2x}{1+x^2} dx \quad \text{par intégration par parties} \\ &= \ln 2 - 2 \int_0^1 1 - \frac{1}{1+x^2} dx \\ &= \ln 2 - 2[x - \arctan x]_0^1 \\ &= \ln 2 - 2 + \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

Nous venons de prouver que $w_n = \ln v_n$ converge vers $I = \ln 2 - 2 + \frac{\pi}{2}$, donc $v_n = \exp w_n$ converge vers $\exp(\ln 2 - 2 + \frac{\pi}{2}) = 2e^{\frac{\pi}{2}-2}$. Bilan (v_n) a pour limite $2e^{\frac{\pi}{2}-2}$.
