Fonctions circulaires et hyperboliques inverses

Corrections de Léa Blanc-Centi.

1 Fonctions circulaires inverses

Exercice 1

Vérifier
$$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2} \qquad \text{et} \qquad \arctan x + \arctan\frac{1}{x} = \operatorname{sgn}(x)\frac{\pi}{2}.$$

Indication ▼ Correction ▼ Vidéo ■ [000752]

Exercice 2

Une statue de hauteur s est placée sur un piédestal de hauteur p.

1. À quelle distance x_0 doit se placer un observateur (dont la taille est supposée négligeable) pour voir la statue sous un angle maximal α_0 ?
2. Vérifier que $\alpha_0 = \arctan\frac{s}{2\sqrt{p(p+s)}}$.
3. Application à la statue de la liberté : haute de 46 mètres avec un piédestal de 47 mètres.

Indication ▼ Correction ▼ Vidéo ■ [000745]

Exercice 3

Écrire sous forme d'expression algébrique

1. $\sin(\arccos x)$, $\cos(\arcsin x)$, $\cos(2\arcsin x)$.
2. $\sin(\arctan x)$, $\cos(\arctan x)$, $\sin(3\arctan x)$.

Indication ▼ Correction ▼ Vidéo ■ [000747]

Exercice 4

Résoudre les équations suivantes:

1. $\arccos x = 2\arccos\frac{3}{4}$.
2. $\arcsin x = \arcsin\frac{2}{5} + \arcsin\frac{3}{5}$.
3. $\arctan 2x + \arctan x = \frac{\pi}{4}$.

Indication ▼ Correction ▼ Vidéo ■ [000749]

Exercice 5

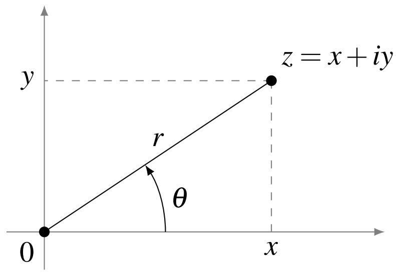
Montrer que pour tout $x > 0$, on a
$$\arctan\left(\frac{1}{2x^2}\right) = \arctan\left(\frac{x}{x+1}\right) - \arctan\left(\frac{x-1}{x}\right).$$

En déduire une expression de $S_n = \sum_{k=1}^{n} \arctan\left(\frac{1}{2k^2}\right)$ et calculer $\lim_{n\to+\infty} S_n$.

Indication ▼ Correction ▼ Vidéo ■ [006973]

Exercice 6

Soit $z = x+iy$ un nombre complexe, où $x = \operatorname{Re} z$ et $y = \operatorname{Im} z$. On sait que si z est non nul, on peut l'écrire de façon unique sous la forme $z = x+iy = re^{i\theta}$, où $\theta \in]-\pi,\pi]$ et $r = \sqrt{x^2+y^2}$.



1. Montrer que si $x > 0$, alors $\theta = \arctan\frac{y}{x}$.
2. Montrer que si $\theta \in]-\pi,\pi[$, alors $\theta = 2\arctan\left(\frac{\sin\theta}{1+\cos\theta}\right)$.
3. En déduire que si z n'est pas réel négatif ou nul, on a l'égalité

$$\theta = 2\arctan\left(\frac{y}{x+\sqrt{x^2+y^2}}\right).$$

Correction ▼ Vidéo ■ [006974]

2 Fonctions hyperboliques

Exercice 7

Simplifier l'expression $\dfrac{2\operatorname{ch}^2(x)-\operatorname{sh}(2x)}{x-\ln(\operatorname{ch}x)-\ln 2}$ et donner ses limites en $-\infty$ et $+\infty$.

Indication ▼ Correction ▼ Vidéo ■ [006975]

Exercice 8

Soit $x \in \mathbb{R}$. On pose $t = \arctan(\operatorname{sh}x)$.

1. Établir les relations

$$\tan t = \operatorname{sh}x \qquad \frac{1}{\cos t} = \operatorname{ch}x \qquad \sin t = \operatorname{th}x$$

2. Montrer que $x = \ln\left(\tan\left(\frac{t}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right)$.

Indication ▼ Correction ▼ Vidéo ■ [000764]

Exercice 9

Soit x un réel fixé. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$C_n = \sum_{k=1}^{n} \operatorname{ch}(kx) \qquad \text{et} \qquad S_n = \sum_{k=1}^{n} \operatorname{sh}(kx).$$

Calculer C_n et S_n.

Indication ▼ Correction ▼ Vidéo ■ [006976]

Exercice 10

Soit a et b deux réels positifs tels que $a^2 - b^2 = 1$. Résoudre le système

$$\begin{cases} \operatorname{ch}(x) + \operatorname{ch}(y) = 2a \\ \operatorname{sh}(x) + \operatorname{sh}(y) = 2b \end{cases}$$

Indication ▼ Correction ▼ Vidéo ■ [006977]

3 Fonctions hyperboliques inverses

Exercice 11

Simplifier les expressions suivantes:

1. $\operatorname{ch}(\operatorname{argsh} x)$, $\operatorname{th}(\operatorname{argsh} x)$, $\operatorname{sh}(2 \operatorname{argsh} x)$.
2. $\operatorname{sh}(\operatorname{argch} x)$, $\operatorname{th}(\operatorname{argch} x)$, $\operatorname{ch}(3 \operatorname{argch} x)$.

Correction ▼ Vidéo ■ [006978]

Exercice 12

Étudier le domaine de définition de la fonction f définie par

$$f(x) = \operatorname{argch}\left[\frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{x}\right)\right]$$

et simplifier son expression lorsqu'elle a un sens.

Indication ▼ Correction ▼ Vidéo ■ [006979]

Exercice 13

Montrer que l'équation $\operatorname{argsh} x + \operatorname{argch} x = 1$ admet une unique solution, puis la déterminer.

Indication ▼ Correction ▼ Vidéo ■ [006980]

Indication pour l'exercice 1 ▲

Faire une étude de fonction. La fonction $\operatorname{sgn}(x)$ est la *fonction signe* : elle vaut $+1$ si $x > 0$, -1 si $x < 0$ (et 0 si $x = 0$).

Indication pour l'exercice 2 ▲

Faire un dessin. Calculer l'angle d'observation α en fonction de la distance x et étudier cette fonction. Pour simplifier l'expression de α_0, calculer $\tan\alpha_0$ à l'aide de la formule donnant $\tan(a-b)$.

Indication pour l'exercice 3 ▲

Il faut utiliser les identités trigonométriques classiques.

Indication pour l'exercice 4 ▲

On compose les équations par la bonne fonction (sur le bon domaine de définition), par exemple cosinus pour la première. Pour la dernière, commencer par étudier la fonction pour montrer qu'il existe une unique solution.

Indication pour l'exercice 5 ▲

Dériver la différence des deux expressions.

Indication pour l'exercice 7 ▲

On trouve $-\frac{1+e^{-2x}}{\ln(1+e^{-2x})}$.

Indication pour l'exercice 8 ▲

Pour la première question calculer $\frac{1}{\cos^2 t}$. Pour la seconde question, vérifier que $y = \ln\left(\tan\left(\frac{t}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right)$ est bien défini et calculer $\operatorname{sh} y$.

Indication pour l'exercice 9 ▲

Commencer par calculer $C_n + S_n$ et $C_n - S_n$ à l'aide des fonctions ch et sh.

Indication pour l'exercice 10 ▲

Poser $X = e^x$ et $Y = e^y$ et se ramener à un système d'équations du type somme-produit.

Indication pour l'exercice 12 ▲

On trouve $f(x) = |\ln x|$ pour tout $x > 0$.

Indication pour l'exercice 13 ▲

Faire le tableau de variations de $f : x \mapsto \operatorname{argsh} x + \operatorname{argch} x$.

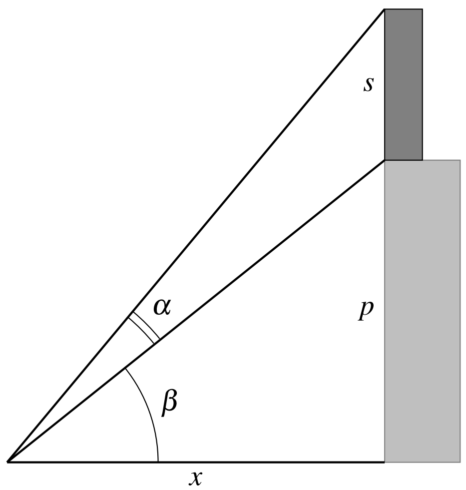
Correction de l'exercice 1 ▲

1. Soit f la fonction définie sur $[-1,1]$ par $f(x) = \arcsin x + \arccos x$: f est continue sur l'intervalle $[-1,1]$, et dérivable sur $]-1,1[$. Pour tout $x \in]-1,1[$, $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} = 0$. Ainsi f est constante sur $]-1,1[$, donc sur $[-1,1]$ (car continue aux extrémités). Or $f(0) = \arcsin 0 + \arccos 0 = \frac{\pi}{2}$ donc pour tout $x \in [-1,1]$, $f(x) = \frac{\pi}{2}$.

2. Soit $g(x) = \arctan x + \arctan \frac{1}{x}$. Cette fonction est définie sur $]-\infty,0[$ et sur $]0,+\infty[$ (mais pas en 0). On a
$$g'(x) = \frac{1}{1+x^2} + \frac{-1}{x^2} \cdot \frac{1}{1+\frac{1}{x^2}} = 0,$$
donc g est constante sur chacun de ses intervalles de définition: $g(x) = c_1$ sur $]-\infty,0[$ et $g(x) = c_2$ sur $]0,+\infty[$. Sachant $\arctan 1 = \frac{\pi}{4}$, on calcule $g(1)$ et $g(-1)$ on obtient $c_1 = -\frac{\pi}{2}$ et $c_2 = +\frac{\pi}{2}$.

Correction de l'exercice 2 ▲

1. On note x la distance de l'observateur au pied de la statue. On note α l'angle d'observation de la statue seule, et β l'angle d'observation du piédestal seul.



Nous avons les relations trigonométriques dans les triangles rectangles :
$$\tan(\alpha+\beta) = \frac{p+s}{x} \qquad \text{et} \qquad \tan\beta = \frac{p}{x}$$
On en déduit les deux identités :
$$\alpha+\beta = \arctan\left(\frac{p+s}{x}\right) \qquad \text{et} \qquad \beta = \arctan\left(\frac{p}{x}\right)$$
à partir desquelles on obtient $\alpha = \alpha(x) = \arctan\left(\frac{p+s}{x}\right) - \arctan\left(\frac{p}{x}\right)$.

Étudions cette fonction sur $]0,+\infty[$: elle est dérivable et
$$\alpha'(x) = \frac{-\frac{s+p}{x^2}}{1+\left(\frac{s+p}{x}\right)^2} - \frac{-\frac{p}{x^2}}{1+\left(\frac{p}{x}\right)^2} = \frac{s}{(x^2+p^2)(x^2+(s+p)^2)}\left(p(p+s)-x^2\right)$$
Ainsi α' ne s'annule sur $]0,+\infty[$ qu'en $x_0 = \sqrt{p(p+s)}$. Par des considérations physiques, à la limite en 0 et en $+\infty$, l'angle α est nul, alors en x_0 nous obtenons un angle α maximum. Donc la distance optimale de vision est $x_0 = \sqrt{p(p+s)}$.

2. Pour calculer l'angle maximum α_0 correspondant, on pourrait calculer $\alpha_0 = \alpha(x_0)$ à partir de la définition de la fonction $\alpha(x)$. Pour obtenir une formule plus simple nous utilisons la formule trigonométrique suivante : si a, b et $a-b$ sont dans l'intervalle de définition de la fonction tan, alors $\tan(a-b) = \frac{\tan a - \tan b}{1+\tan a \tan b}$, ce qui donne ici

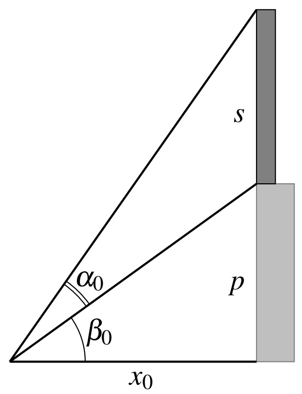
$$\tan\alpha_0 = \tan\left((\alpha_0+\beta_0)-\beta_0\right) = \frac{\frac{p+s}{x_0}-\frac{p}{x_0}}{1+\frac{p+s}{x_0}\cdot\frac{p}{x_0}} = \frac{s}{2x_0} = \frac{s}{2\sqrt{p(p+s)}}$$

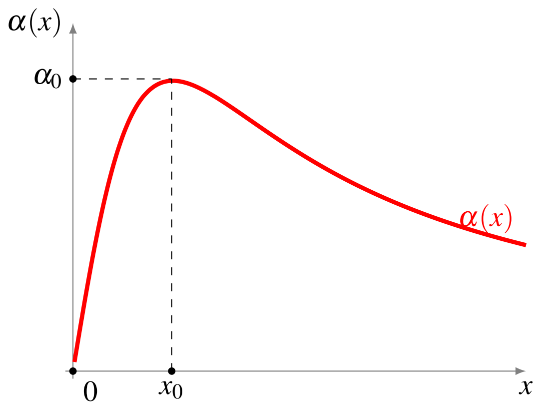
Comme $\alpha_0 \in]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$, on en déduit $\alpha_0 = \arctan\frac{s}{2x_0} = \arctan\frac{s}{2\sqrt{p(p+s)}}$.

3. Pour la statue de la liberté, on a la hauteur de la statue $s = 46$ mètres et la hauteur du piédestal $p = 47$ mètres. On trouve donc

$$x_0 = \sqrt{p(p+s)} \simeq 65,40\text{mètres} \qquad \alpha_0 = \arctan\frac{s}{2\sqrt{p(p+s)}} \simeq 19^\circ.$$

Voici les représentations de la statue et de la fonction $\alpha(x)$ pour ces valeurs de s et p.





Correction de l'exercice 3 ▲

1. $\sin^2 y = 1-\cos^2 y$, donc $\sin y = \pm\sqrt{1-\cos^2 y}$. Avec $y = \arccos x$, il vient $\sin(\arccos x) = \pm\sqrt{1-x^2}$. Or $\arccos x \in [0,\pi]$, donc $\sin(\arccos x)$ est positif et finalement $\sin(\arccos x) = +\sqrt{1-x^2}$. De la même manière on trouve $\cos(\arcsin x) = \pm\sqrt{1-x^2}$. Or $\arcsin x \in [-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$, donc $\cos(\arcsin x)$ est positif et finalement $\cos(\arcsin x) = +\sqrt{1-x^2}$.

   Ces deux égalités sont à connaître ou à savoir retrouver très rapidement :

$$\sin(\arccos x) = \sqrt{1-x^2} = \cos(\arcsin x).$$

   Enfin, puisque $\cos(2y) = \cos^2 y - \sin^2 y$, on obtient avec $y = \arcsin x$,

$$\cos(2\arcsin x) = (\sqrt{1-x^2})^2 - x^2 = 1-2x^2.$$

2. Commençons par calculer $\sin(\arctan x)$, $\cos(\arctan x)$. On utilise l'identité $1+\tan^2 y = \frac{1}{\cos^2 y}$ avec $y = \arctan x$, ce qui donne $\cos^2 y = \frac{1}{1+x^2}$ et $\sin^2 y = 1-\cos^2 y = \frac{x^2}{1+x^2}$. Il reste à déterminer les signes de $\cos(\arctan x) = \pm\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ et $\sin(\arctan x) = \pm\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ Or $y = \arctan x$ donc $y \in]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$ et y a le même signe que x : ainsi $\cos y > 0$, et $\sin y$ a le même signe que y et donc que x. Finalement, on a $\cos(\arctan x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ et $\sin(\arctan x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$.

Il ne reste plus qu'à linéariser $\sin(3y)$:

$$\begin{aligned}\sin(3y) &= \sin(2y+y) = \cos(2y)\sin(y)+\cos(y)\sin(2y) \\ &= (2\cos^2 y-1)\sin y+2\sin y\cos^2 y \\ &= 4\sin y\cos^2 y-\sin y\end{aligned}$$

Maintenant

$$\begin{aligned}\sin(3\arctan x) &= \sin(3y) = 4\sin y\cos^2 y-\sin y \\ &= 4\frac{x}{(1+x^2)^{3/2}}-\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{x(3-x^2)}{(1+x^2)^{3/2}}\end{aligned}$$

Remarque : la méthode générale pour obtenir la formule de linéarisation de $\sin(3y)$ est d'utiliser les nombres complexes et la formule de Moivre. On développe

$$\cos(3y)+i\sin(3y) = (\cos y+i\sin y)^3 = \cos^3 y+3i\cos^2 y\sin y+\cdots$$

puis on identifie les parties imaginaires pour avoir $\sin(3y)$, ou les parties réelles pour avoir $\cos(3y)$.

Correction de l'exercice 4 ▲

1. On vérifie d'abord que $2\arccos\frac{3}{4}\in[0,\pi]$ (sinon, l'équation n'aurait aucune solution). En effet, par définition, la fonction arccos est décroissante sur $[-1,1]$ à valeurs dans $[0,\pi]$, donc puisque $\frac{1}{2}\leqslant\frac{3}{4}\leqslant 1$ on a $\frac{\pi}{3}\geqslant\cos\left(\frac{3}{4}\right)\geqslant 0$. Puisque par définition $\arccos x\in[0,\pi]$, on obtient en prenant le cosinus:
$$\arccos x = 2\arccos\left(\frac{3}{4}\right) \iff x=\cos\left(2\arccos\frac{3}{4}\right)$$
En appliquant la formule $\cos 2u = 2\cos^2 u-1$, on arrive donc à une unique solution $x=2(\frac{3}{4})^2-1=\frac{1}{8}$.

2. Vérifions d'abord que $-\frac{\pi}{2}\leqslant\arcsin\frac{2}{5}+\arcsin\frac{3}{5}\leqslant\frac{\pi}{2}$. En effet, la fonction arcsin est strictement croissante et $0<\frac{2}{5}<\frac{1}{2}<\frac{3}{5}<\frac{\sqrt{2}}{2}$, ce qui donne $0<\arcsin\left(\frac{2}{5}\right)<\frac{\pi}{6}<\arcsin\left(\frac{3}{5}\right)<\frac{\pi}{4}$, d'où l'encadrement $0+\frac{\pi}{6}<\arcsin\frac{2}{5}+\arcsin\frac{3}{5}\leqslant\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{4}$.
Puisque par définition on aussi $\arcsin x\in[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$, il vient en prenant le sinus:
$$\begin{aligned} & \arcsin x = \arcsin\frac{2}{5}+\arcsin\frac{3}{5} \\ \iff\quad & x=\sin\left(\arcsin\frac{2}{5}+\arcsin\frac{3}{5}\right) \\ \iff\quad & x=\frac{3}{5}\cos\left(\arcsin\frac{2}{5}\right)+\frac{2}{5}\cos\left(\arcsin\frac{3}{5}\right)\end{aligned}$$
La dernière équivalence vient de la formule de $\sin(a+b)=\cos a\sin b+\cos b\sin a$ et de l'identité $\sin\left(\arcsin u\right)=u$.
En utilisant la formule $\cos(\arcsin x)=\sqrt{1-x^2}$, on obtient une unique solution: $x=\frac{3}{5}\sqrt{\frac{21}{25}}+\frac{2}{5}\frac{4}{5}=\frac{3\sqrt{21}+8}{25}$.

3. Supposons d'abord que x est solution. Remarquons d'abord que x est nécessairement positif, puisque $\arctan x$ a le même signe que x. Alors, en prenant la tangente des deux membres, on obtient $\tan\left(\arctan(2x)+\arctan(x)\right)=1$.

En utilisant la formule donnant la tangente d'une somme : $\tan(a+b) = \frac{\tan a+\tan b}{1-\tan a \tan b}$, on obtient $\frac{2x+x}{1-2x\cdot x} = 1$, et finalement $2x^2+3x-1=0$ qui admet une unique solution positive $x_0 = \frac{-3+\sqrt{17}}{4}$. Ainsi, *si* l'équation de départ admet une solution, c'est nécessairement x_0.

Or, en posant $f(x) = \arctan(2x)+\arctan(x)$, la fonction f est continue sur $\mathbb{R}$. Comme $f(x) \xrightarrow[x\to-\infty]{} -\pi$ et $f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\pi$, on sait d'après le théorème des valeurs intermédiaires que f prend la valeur $\frac{\pi}{4}$ au moins une fois (et en fait une seule fois, puisque f est strictement croissante comme somme de deux fonctions strictement croissantes). Ainsi l'équation de départ admet bien une solution, qui est x_0.

Correction de l'exercice 5 ▲

Posons $f(x) = \arctan\left(\frac{1}{2x^2}\right) - \arctan\left(\frac{x}{x+1}\right) + \arctan\left(\frac{x-1}{x}\right)$ pour tout $x>0$. La fonction f est dérivable, et

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{-\frac{2}{2x^3}}{1+\left(\frac{1}{2x^2}\right)^2} - \frac{\frac{1}{(1+x)^2}}{1+\left(\frac{x}{x+1}\right)^2} + \frac{\frac{1}{x^2}}{1+\left(\frac{x-1}{x}\right)^2}\\
&= \frac{-4x}{4x^4+1} - \frac{1}{(1+x)^2+x^2} + \frac{1}{x^2+(x-1)^2}\\
&= \frac{-4x}{4x^4+1} + \frac{-\left(x^2+(x-1)^2\right)+\left((1+x)^2+x^2\right)}{\left((1+x)^2+x^2\right)\left(x^2+(x-1)^2\right)}\\
&= 0
\end{aligned}$$

Ainsi f est une fonction constante. Or $f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} \arctan 0 - \arctan 1 + \arctan 1 = 0$. Donc la constante vaut 0, d'où l'égalité cherchée.

Alors :

$$\begin{aligned}
S_n &= \sum_{k=1}^{n} \arctan\left(\frac{1}{2k^2}\right)\\
&= \sum_{k=1}^{n} \arctan\left(\frac{k}{k+1}\right) - \sum_{k=1}^{n} \arctan\left(\frac{k-1}{k}\right) \quad \text{(par l'identité prouvée)}\\
&= \sum_{k=1}^{n} \arctan\left(\frac{k}{k+1}\right) - \sum_{k'=0}^{n-1} \arctan\left(\frac{k'}{k'+1}\right) \quad \text{(en posant } k'=k-1\text{)}\\
&= \arctan\left(\frac{n}{n+1}\right) - \arctan\left(\frac{0}{0+1}\right) \quad \text{(les sommes se simplifient)}\\
&= \arctan\left(1-\frac{1}{n+1}\right) \quad \left(\text{car } \frac{n}{n+1} = 1-\frac{1}{n+1}\right)
\end{aligned}$$

Ainsi $S_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \arctan 1 = \frac{\pi}{4}$.

Correction de l'exercice 6 ▲

1. Si $x>0$, alors $\frac{y}{x}$ est bien défini et $\arctan\frac{y}{x}$ aussi. Comme $x = r\cos\theta$ et $y = r\sin\theta$, on a bien $\frac{y}{x} = \tan\theta$. Puisque par hypothèse $\theta \in]-\pi,\pi]$ et que l'on a supposé $x>0$, alors $\cos\theta>0$. Cela implique $\theta \in]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$. Donc $\theta = \arctan(\tan\theta) = \arctan\frac{y}{x}$. (Attention ! Il est important d'avoir $\theta \in]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$ pour considérer l'identité $\arctan(\tan\theta) = \theta$.)

2. Si $\theta \in]-\pi,\pi[$ alors $\frac{\theta}{2} \in]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$, donc $\frac{\theta}{2} = \arctan\left(\tan\frac{\theta}{2}\right)$. Or

$$\frac{\sin\theta}{1+\cos\theta} = \frac{2\cos\frac{\theta}{2}\sin\frac{\theta}{2}}{1+\left(2\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)-1\right)} = \frac{\sin\frac{\theta}{2}}{\cos\frac{\theta}{2}} = \tan\frac{\theta}{2}$$

d'où $\frac{\theta}{2} = \arctan\left(\tan\frac{\theta}{2}\right) = \arctan\left(\frac{\sin\theta}{1+\cos\theta}\right)$.

3. Remarquons que $z = x+iy$, supposé non nul, est un nombre réel négatif si et seulement si ($x = r\cos\theta < 0$ et $y = r\sin\theta = 0$), c'est-à-dire $\theta = \pi$. Par conséquent, dire que z n'est pas réel négatif ou nul signifie que $\theta \in]-\pi,\pi[$. On a alors $x+\sqrt{x^2+y^2} \neq 0$ (sinon, on aurait $\sqrt{x^2+y^2} = -x$ et donc $y = 0$ et $x \leqslant 0$) et

$$\frac{y}{x+\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{r\sin\theta}{r\cos\theta + r} = \frac{\sin\theta}{1+\cos\theta}.$$

Par la question précédente :

$$\theta = 2\arctan\left(\frac{\sin\theta}{1+\cos\theta}\right) = 2\arctan\left(\frac{y}{x+\sqrt{x^2+y^2}}\right).$$

Correction de l'exercice 7 ▲

Par définition des fonctions ch et sh, on a

$$\begin{aligned}
2\operatorname{ch}^2(x) - \operatorname{sh}(2x) &= 2\left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right)^2 - \frac{e^{2x}-e^{-2x}}{2} \\
&= \frac{e^{2x}+2+e^{-2x}}{2} + \frac{e^{-2x}-e^{2x}}{2} \\
&= 1+e^{-2x}
\end{aligned}$$

Et en utilisant les deux relations $\ln(ab) = \ln a + \ln b$ et $\ln(e^x) = x$ on calcule :

$$\begin{aligned}
x - \ln(\operatorname{ch} x) - \ln 2 &= x - \ln\left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right) - \ln 2 \\
&= x - \ln(e^x+e^{-x}) + \ln 2 - \ln 2 \\
&= x - \ln\left(e^x(1+e^{-2x})\right) \\
&= x - \ln(e^x) - \ln(1+e^{-2x}) \\
&= x - x - \ln(1+e^{-2x}) \\
&= -\ln(1+e^{-2x})
\end{aligned}$$

d'où

$$\frac{2\operatorname{ch}^2(x) - \operatorname{sh}(2x)}{x - \ln(\operatorname{ch} x) - \ln 2} = -\frac{1+e^{-2x}}{\ln(1+e^{-2x})}$$

C'est une expression de la forme $-\frac{u}{\ln u}$ avec $u = 1+e^{-2x}$:

- si $x \to +\infty$, alors $u \to 1^+$, $\frac{1}{\ln u} \to +\infty$ donc $-\frac{u}{\ln u} \to -\infty$;
- si $x \to -\infty$, alors $u \to +\infty$ donc d'après les relations de croissances comparées, $-\frac{u}{\ln u} \to -\infty$.

Correction de l'exercice 8 ▲

1. (a) Remarquons d'abord que, par construction, $t \in]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$, t est donc dans le domaine de définition de la fonction tan. En prenant la tangente de l'égalité $t = \arctan(\operatorname{sh} x)$ on obtient directement $\tan t = \tan\left(\arctan(\operatorname{sh} x)\right) = \operatorname{sh} x$.

   (b) Ensuite, $\frac{1}{\cos^2 t} = 1+\tan^2 t = 1+\tan^2\left(\arctan(\operatorname{sh} x)\right) = 1+\operatorname{sh}^2 x = \operatorname{ch}^2 x$. Or la fonction ch ne prend que des valeurs positives, et $t \in]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$ donc $\cos t > 0$. Ainsi $\frac{1}{\cos t} = \operatorname{ch} x$.

   (c) Enfin, $\sin t = \tan t \cdot \cos t = \operatorname{sh} x \cdot \frac{1}{\operatorname{ch} x} = \operatorname{th} x$.

2. Puisque $t \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, on a $0 < \frac{t}{2} + \frac{\pi}{4} < \frac{\pi}{2}$, donc $\tan\left(\frac{t}{2} + \frac{\pi}{4}\right)$ est bien défini et strictement positif. Ainsi $y = \ln\left(\tan\left(\frac{t}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right)$ est bien défini.

   Ensuite :

$$\begin{aligned}
\operatorname{sh} y &= \frac{e^y - e^{-y}}{2} \\
&= \frac{1}{2}\tan\left(\frac{t}{2} + \frac{\pi}{4}\right) - \frac{1}{2}\frac{1}{\tan\left(\frac{t}{2} + \frac{\pi}{4}\right)} \\
&= \frac{\sin^2\left(\frac{t}{2} + \frac{\pi}{4}\right) - \cos^2\left(\frac{t}{2} + \frac{\pi}{4}\right)}{2\cos\left(\frac{t}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\sin\left(\frac{t}{2} + \frac{\pi}{4}\right)} \\
&= \frac{-\cos\left(t + \frac{\pi}{2}\right)}{\sin\left(t + \frac{\pi}{2}\right)}
\end{aligned}$$

   car $\sin(2u) = 2\cos u \sin u$ et $\cos(2u) = \cos^2 u - \sin^2 u$.

   Enfin, puisque $\cos\left(t + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin t$ et $\sin\left(t + \frac{\pi}{2}\right) = \cos t$, on a $\operatorname{sh} y = \frac{\sin t}{\cos t} = \tan t = \operatorname{sh} x$. Puisque la fonction sh est bijective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, on en déduit $y = x$. Conclusion : $x = y = \ln\left(\tan\left(\frac{t}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right)$.

Correction de l'exercice 9 ▲

Puisque $\operatorname{ch} x + \operatorname{sh} x = e^x$ et $\operatorname{ch} x - \operatorname{sh} x = e^{-x}$, les expressions $C_n + S_n = \sum_{k=1}^n e^{kx}$ et $C_n - S_n = \sum_{k=1}^n e^{-kx}$ sont des sommes de termes de suites géométriques, de raison respectivement e^x et e^{-x}.
Si $x = 0$, on a directement $C_n = \sum_{k=1}^n 1 = n$ et $S_n = \sum_{k=1}^n 0 = 0$.
Supposons $x \neq 0$, alors $e^x \neq 1$. Donc

$$\begin{aligned}
C_n + S_n &= \sum_{k=1}^n e^{kx} = \frac{e^x - e^{(n+1)x}}{1 - e^x} \\
&= e^x \frac{1 - e^{nx}}{1 - e^x} \\
&= e^x \frac{e^{\frac{nx}{2}}\left(e^{-\frac{nx}{2}} - e^{\frac{nx}{2}}\right)}{e^{\frac{x}{2}}\left(e^{-\frac{x}{2}} - e^{\frac{x}{2}}\right)} \\
&= e^{\frac{(n+1)x}{2}} \frac{e^{\frac{nx}{2}} - e^{-\frac{nx}{2}}}{e^{\frac{x}{2}} - e^{-\frac{x}{2}}} \\
&= e^{\frac{(n+1)x}{2}} \frac{\operatorname{sh}\frac{nx}{2}}{\operatorname{sh}\frac{x}{2}}
\end{aligned}$$

De même $C_n - S_n = \sum_{k=1}^n e^{-kx}$; c'est donc la même formule que ci-dessus en remplaçant x par $-x$. Ainsi :

$$C_n - S_n = e^{-\frac{(n+1)x}{2}} \frac{\operatorname{sh}\frac{nx}{2}}{\operatorname{sh}\frac{x}{2}}$$

En utilisant $C_n = \frac{(C_n+S_n)+(C_n-S_n)}{2}$ et $S_n = \frac{(C_n+S_n)-(C_n-S_n)}{2}$, on récupère donc

$$C_n = \frac{e^{\frac{(n+1)x}{2}} + e^{-\frac{(n+1)x}{2}}}{2} \frac{\operatorname{sh}\frac{nx}{2}}{\operatorname{sh}\frac{x}{2}} = \operatorname{ch}\left(\frac{(n+1)x}{2}\right) \frac{\operatorname{sh}\frac{nx}{2}}{\operatorname{sh}\frac{x}{2}}$$

$$S_n = \frac{e^{\frac{(n+1)x}{2}} - e^{-(n+1)\frac{x}{2}}}{2} \frac{\operatorname{sh}\frac{nx}{2}}{\operatorname{sh}\frac{x}{2}} = \operatorname{sh}\left(\frac{(n+1)x}{2}\right) \frac{\operatorname{sh}\frac{nx}{2}}{\operatorname{sh}\frac{x}{2}}$$

Correction de l'exercice 10 ▲

$$
(S)\left\{\begin{array}{l}\mathrm{ch}(x)+\mathrm{ch}(y)=2a\\ \mathrm{sh}(x)+\mathrm{sh}(y)=2b\end{array}\right.
\iff \left\{\begin{array}{l}e^x+e^{-x}+e^y+e^{-y}=4a\\ e^x-e^{-x}+e^y-e^{-y}=4b\end{array}\right.
$$
$$
\iff \left\{\begin{array}{l}e^x+e^y=2a+2b\\ e^x-e^{-x}+e^y-e^{-y}=4b\end{array}\right.
$$
$$
\iff \left\{\begin{array}{l}e^x+e^y=2a+2b\\ -e^{-x}-e^{-y}=2b-2a\end{array}\right.
$$
$$
\iff \left\{\begin{array}{l}e^x+e^y=2(a+b)\\ \frac{1}{e^x}+\frac{1}{e^y}=2(a-b)\end{array}\right.
$$

ce qui donne, en posant $X=e^x$ et $Y=e^y$:

$$
(S) \iff \left\{\begin{array}{l}X+Y=2(a+b)\\ \frac{1}{X}+\frac{1}{Y}=2(a-b)\end{array}\right.
$$
$$
\iff \left\{\begin{array}{l}X+Y=2(a+b)\\ \frac{X+Y}{XY}=2(a-b)\end{array}\right.
$$
$$
\iff \left\{\begin{array}{l}X+Y=2(a+b)\\ \frac{2(a+b)}{XY}=2(a-b)\end{array}\right.
$$

Or $a\neq b$ puisque par hypothèse, $a^2-b^2=1$. Ainsi,

$$
(S) \iff \left\{\begin{array}{l}X+Y=2(a+b)\\ XY=\frac{a+b}{a-b}\end{array}\right.
$$
$$
\iff X \text{ et } Y \text{ sont les solutions de } z^2-2(a+b)z+\frac{a+b}{a-b}=0
$$

Remarque : On rappelle que si X,Y vérifient le système $\left\{\begin{array}{l}X+Y=S\\ XY=P\end{array}\right.$, alors X et Y sont les solutions de l'équation $z^2-Sz+P=0$.

Or le discriminant du trinôme $z^2-2(a+b)z+\frac{a+b}{a-b}=0$ vaut

$$
\Delta=4(a+b)^2-4\frac{a+b}{a-b}=4(a+b)\left(a+b-\frac{1}{a-b}\right)=\frac{4(a+b)(a^2-b^2-1)}{a-b}=0
$$

Il y a donc une racine double qui vaut $\frac{2(a+b)}{2}$, ainsi $X=Y=a+b$ et donc :

$$
(S)\iff e^x=e^y=a+b
$$

On vérifie que $a+b\geqslant 0$ (car $a\geqslant 0$ et $b\geqslant 0$) et $a+b\neq 0$ (car $a^2-b^2=1$). Conclusion : le système (S) admet une unique solution, donnée par $\big(x=\ln(a+b),y=\ln(a+b)\big)$.

Correction de l'exercice 11 ▲

---

1. (a) On sait que $\mathrm{ch}^2 u=1+\mathrm{sh}^2 u$. Comme de plus la fonction ch est à valeurs positives, $\mathrm{ch}\,u=\sqrt{1+\mathrm{sh}^2 u}$ et donc $\mathrm{ch}(\mathrm{argsh}\,x)=\sqrt{1+\mathrm{sh}^2(\mathrm{argsh}\,x)}=\sqrt{1+x^2}$.

   (b) Alors
   $$
   \mathrm{th}(\mathrm{argsh}\,x)=\frac{\mathrm{sh}(\mathrm{argsh}\,x)}{\mathrm{ch}(\mathrm{argsh}\,x)}=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}.
   $$

   (c) Et $\mathrm{sh}(2\,\mathrm{argsh}\,x)=2\,\mathrm{ch}(\mathrm{argsh}\,x)\,\mathrm{sh}(\mathrm{argsh}\,x)=2x\sqrt{1+x^2}$.

2. On pourrait, comme pour la question précédente, appliquer les formules trigonométriques hyperboliques. Pour changer, on va plutôt utiliser les expressions explicites des fonctions hyperboliques réciproques. Supposons $x \geqslant 1$, pour que $\operatorname{argch} x$ soit bien défini, alors on a la formule (à connaître) :

$$\operatorname{argch} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right).$$

Ainsi :

$$\begin{aligned}
\operatorname{sh}(\operatorname{argch} x) &= \frac{e^{\operatorname{argch} x} - e^{-\operatorname{argch} x}}{2} \\
&= \frac{x + \sqrt{x^2-1} - \frac{1}{x+\sqrt{x^2-1}}}{2} \\
&= \frac{x+\sqrt{x^2-1}}{2} - \frac{x-\sqrt{x^2-1}}{2\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)\left(x-\sqrt{x^2-1}\right)} \\
&= \frac{x+\sqrt{x^2-1}}{2} - \frac{x-\sqrt{x^2-1}}{2\left(x^2-(x^2-1)\right)} \\
&= \sqrt{x^2-1}
\end{aligned}$$

Donc $\operatorname{th}(\operatorname{argch} x) = \dfrac{\operatorname{sh}(\operatorname{argch} x)}{\operatorname{ch}(\operatorname{argch} x)} = \dfrac{\sqrt{x^2-1}}{x}$.

Enfin, si $u = \operatorname{argch} x$: $\operatorname{ch}(3u) = \operatorname{ch}(2u+u) = \operatorname{ch}(2u)\operatorname{ch} u + \operatorname{sh}(2u)\operatorname{sh} u$, où

$$\left\{\begin{array}{l}
\operatorname{ch}(2u) = \operatorname{ch}^2 u + \operatorname{sh}^2 u = x^2 + (x^2-1) = 2x^2-1 \\
\operatorname{sh}(2u) = 2\operatorname{sh} u \operatorname{ch} u = 2x\sqrt{x^2-1}
\end{array}\right.$$

Donc $\operatorname{ch}(3\operatorname{argch} x) = (2x^2-1)x + 2x\sqrt{x^2-1}\sqrt{x^2-1} = x(4x^2-3)$.

Correction de l'exercice 12 ▲

La fonction argch est définie sur $[1,+\infty[$. Or

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\left(x+\frac{1}{x}\right) \geqslant 1 &\iff \frac{x^2+1}{x} \geqslant 2 \\
&\iff \frac{x^2+1-2x}{x} \geqslant 0 \\
&\iff \frac{(x-1)^2}{x} \geqslant 0 \\
&\iff x > 0
\end{aligned}$$

donc f est définie sur $]0,+\infty[$.

Soit $x > 0$, alors $y = \frac{1}{2}\left(x+\frac{1}{x}\right) \geqslant 1$ et on sait que $\operatorname{argch} y = \ln(y+\sqrt{y^2-1})$. Ainsi $\sqrt{y^2-1} = \sqrt{\frac{1}{4}\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-1} = \sqrt{\frac{(x^2+1)^2}{4x^2}-1} = \sqrt{\frac{(x^2-1)^2}{4x^2}} = \left|\frac{x^2-1}{2x}\right|$, on obtient

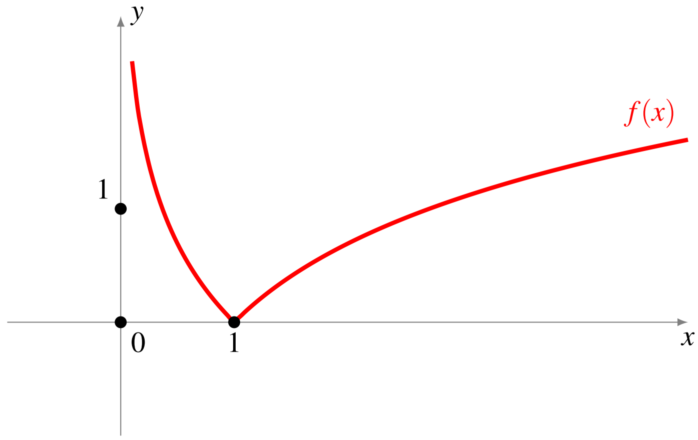
$$f(x) = \operatorname{argch} y = \ln(y+\sqrt{y^2-1}) = \ln\left(\frac{x^2+1}{2x} + \left|\frac{x^2-1}{2x}\right|\right)$$

On a supposé $x > 0$, il suffit donc de distinguer les cas $x \geqslant 1$ et $0 < x \leqslant 1$.

- Si $x \geqslant 1$, $f(x) = \ln\left(\dfrac{x^2+1}{2x} + \dfrac{x^2-1}{2x}\right) = \ln x$.

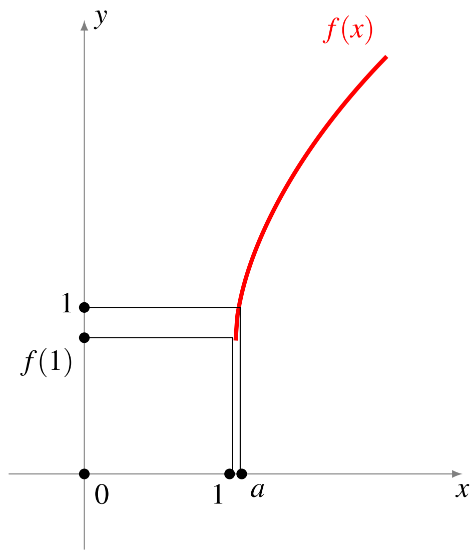
- Si $0 < x \leqslant 1$, $f(x) = \ln\left(\dfrac{x^2+1}{2x} + \dfrac{1-x^2}{2x}\right) = \ln\dfrac{1}{x} = -\ln x$.

Puisque $\ln x$ est positif si $x \geqslant 1$ et négatif si $x \leqslant 1$, on obtient dans les deux cas $f(x) = |\ln x|$.



Correction de l'exercice 13 ▲

Soit $f(x) = \operatorname{argsh} x + \operatorname{argch} x$. La fonction f est bien définie, continue, et strictement croissante, sur $[1, +\infty[$ (comme somme de deux fonctions continues strictement croissantes).



De plus, $f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$, donc f atteint exactement une fois toute valeur de l'intervalle $[f(1), +\infty[$. Comme (par la formule logarithmique) $f(1) = \operatorname{argsh} 1 = \ln(1+\sqrt{2}) < \ln(e) = 1$, on a $1 \in [f(1), +\infty[$. Par le théorème des valeurs intermédiaires l'équation $f(x) = 1$ admet une unique solution, que l'on notera a.

Déterminons la solution :

$$\begin{aligned}
\operatorname{sh} 1 &= \operatorname{sh}(\operatorname{argsh} a + \operatorname{argch} a) \\
&= \operatorname{sh}(\operatorname{argsh} a)\operatorname{ch}(\operatorname{argch} a) + \operatorname{sh}(\operatorname{argch} a)\operatorname{ch}(\operatorname{argsh} a) \\
&= a^2 + \sqrt{a^2-1}\sqrt{a^2+1} = a^2 + \sqrt{a^4-1}
\end{aligned}$$

donc $\sqrt{a^4-1} = \operatorname{sh} 1 - a^2$. En élevant au carré et en simplifiant, on obtient $a^2 = \frac{1+\operatorname{sh}^2 1}{2\operatorname{sh} 1} = \frac{\operatorname{ch}^2 1}{2\operatorname{sh} 1}$. Comme on cherche a positif (et que $\operatorname{ch} 1 > 0$), on en déduit $a = \frac{\operatorname{ch} 1}{\sqrt{2\operatorname{sh} 1}}$. Cette valeur est la seule solution possible de l'équation $f(x) = 1$, il faudrait normalement vérifier qu'elle convient bien, puisqu'on a seulement raisonné par implication (et pas par équivalence). Or on sait déjà que l'équation admet une unique solution: c'est donc nécessairement

$$a = \frac{\operatorname{ch} 1}{\sqrt{2 \operatorname{sh} 1}} = \frac{1}{2} \frac{e + \frac{1}{e}}{\sqrt{e - \frac{1}{e}}} = 1,0065\ldots.$$
