Limites de fonctions

1 Théorie

Exercice 1

1. Montrer que toute fonction périodique et non constante n'admet pas de limite en $+\infty$.
2. Montrer que toute fonction croissante et majorée admet une limite finie en $+\infty$.

Indication ▼ Correction ▼ Vidéo ■ [000612]

Exercice 2

1. Démontrer que $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x} = 1$.
2. Soient m,n des entiers positifs. Étudier $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+x^m}-\sqrt{1-x^m}}{x^n}$.
3. Démontrer que $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{x}(\sqrt{1+x+x^2}-1) = \dfrac{1}{2}$.

Indication ▼ Correction ▼ Vidéo ■ [000609]

2 Calculs

Exercice 3

Calculer lorsqu'elles existent les limites suivantes

$a)$ $\lim_{x\to 0} \frac{x^2+2|x|}{x}$ $b)$ $\lim_{x\to -\infty} \frac{x^2+2|x|}{x}$ $c)$ $\lim_{x\to 2} \frac{x^2-4}{x^2-3x+2}$

$d)$ $\lim_{x\to \pi} \frac{\sin^2 x}{1+\cos x}$ $e)$ $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1+x^2}}{x}$ $f)$ $\lim_{x\to +\infty} \sqrt{x+5}-\sqrt{x-3}$

$g)$ $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{1+x^2}-1}{x^2}$ $h)$ $\lim_{x\to 1} \frac{x-1}{x^n-1}$

Indication ▼ Correction ▼ Vidéo ■ [000616]

Exercice 4

Calculer, lorsqu'elles existent, les limites suivantes :

$$\lim_{x\to \alpha} \frac{x^{n+1}-\alpha^{n+1}}{x^n-\alpha^n},$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\tan x-\sin x}{\sin x(\cos 2x-\cos x)},$$

$$\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}-\sqrt{x},$$

$$\lim_{x\to\alpha^+} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{\alpha}-\sqrt{x-\alpha}}{\sqrt{x^2-\alpha^2}}, \quad (\alpha>0)$$

$$\lim_{x\to 0} xE\left(\frac{1}{x}\right),$$

$$\lim_{x\to 2} \frac{e^x-e^2}{x^2+x-6},$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^4}{1+x^\alpha \sin^2 x}, \text{ en fonction de } \alpha\in\mathbb{R}.$$

Indication ▼ Correction ▼ Vidéo ■ [000628]

Exercice 5

Calculer :

$$\lim_{x\to 0} \frac{x}{2+\sin\frac{1}{x}}, \quad \lim_{x\to+\infty} (\ln(1+e^{-x}))^{\frac{1}{x}}, \quad \lim_{x\to 0^+} x^{\frac{1}{\ln(e^x-1)}}.$$

Indication ▼ Correction ▼ Vidéo ■ [000635]

Exercice 6

Trouver pour $(a,b)\in(\mathbb{R}^{+*})^2$:

$$\lim_{x\to 0^+} \left(\frac{a^x+b^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}}.$$

Indication ▼ Correction ▼ Vidéo ■ [000638]

Exercice 7

Déterminer les limites suivantes, en justifiant vos calculs.

1. $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{x+2}{x^2\ln x}$
2. $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} 2x\ln(x+\sqrt{x})$
3. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{x^3-2x^2+3}{x\ln x}$
4. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{e^{\sqrt{x}+1}}{x+2}$
5. $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(3x+1)}{2x}$
6. $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{x^x-1}{\ln(x+1)}$
7. $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \frac{2}{x+1}\ln\left(\frac{x^3+4}{1-x^2}\right)$
8. $\displaystyle\lim_{x\to(-1)^+} (x^2-1)\ln(7x^3+4x^2+3)$

9. $\lim_{x\to 2^+} (x-2)^2 \ln(x^3-8)$

10. $\lim_{x\to 0^+} \dfrac{x(x^x-1)}{\ln(x+1)}$

11. $\lim_{x\to +\infty} (x\ln x - x\ln(x+2))$

12. $\lim_{x\to +\infty} \dfrac{e^x-e^{x^2}}{x^2-x}$

13. $\lim_{x\to 0^+} (1+x)^{\ln x}$

14. $\lim_{x\to +\infty} \left(\dfrac{x+1}{x-3}\right)^x$

15. $\lim_{x\to +\infty} \left(\dfrac{x^3+5}{x^2+2}\right)^{\frac{x+1}{x^2+1}}$

16. $\lim_{x\to +\infty} \left(\dfrac{e^x+1}{x+2}\right)^{\frac{1}{x+1}}$

17. $\lim_{x\to 0^+} \left(\ln(1+x)\right)^{\frac{1}{\ln x}}$

18. $\lim_{x\to +\infty} \dfrac{x^{(x^{x-1})}}{x^{(x^x)}}$

19. $\lim_{x\to +\infty} \dfrac{(x+1)^x}{x^{x+1}}$

20. $\lim_{x\to +\infty} \dfrac{x\sqrt{\ln(x^2+1)}}{1+e^{x-3}}$

Correction ▼ [000623]

Indication pour l'exercice 1 ▲

1. Raisonner par l'absurde.
2. Montrer que la limite est la borne supérieure de l'ensemble des valeurs atteintes $f(\mathbb{R})$.

Indication pour l'exercice 2 ▲

Utiliser l'expression conjuguée.

Indication pour l'exercice 3 ▲

Réponses :

1. La limite à droite vaut $+2$, la limite à gauche -2 donc il n'y a pas de limite.
2. $-\infty$
3. 4
4. 2
5. $\frac{1}{2}$
6. 0
7. $\frac{1}{3}$ en utilisant par exemple que $a^3-1=(a-1)(1+a+a^2)$ pour $a=\sqrt[3]{1+x^2}$.
8. $\frac{1}{n}$

Indication pour l'exercice 4 ▲

1. Calculer d'abord la limite de $f(x)=\frac{x^k-\alpha^k}{x-\alpha}$.
2. Utiliser $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$ et faire un changement de variable $u=\cos x$.
3. Utiliser l'expression conjuguée.
4. Diviser numérateur et dénominateur par $\sqrt{x-\alpha}$ puis utiliser l'expression conjuguée.
5. On a toujours $y-1\leqslant E(y)\leqslant y$, poser $y=1/x$.
6. Diviser numérateur et dénominateur par $x-2$.
7. Pour $\alpha\geqslant 4$ il n'y a pas de limite, pour $\alpha<4$ la limite est $+\infty$.

Indication pour l'exercice 5 ▲

Réponses : $0, \frac{1}{e}, e$.

1. Borner $\sin\frac{1}{x}$.
2. Utiliser que $\ln(1+t)=t\cdot\mu(t)$, pour une certaine fonction μ qui vérifie $\mu(t)\to 1$ lorsque $t\to 0$.
3. Utiliser que $e^t-1=t\cdot\mu(t)$, pour une certaine fonction μ qui vérifie $\mu(t)\to 1$ lorsque $t\to 0$.

Indication pour l'exercice 6 ▲

Réponse: $\sqrt{ab}$.

Correction de l'exercice 1 ▲

1. Soit $p > 0$ la période: pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x+p) = f(x)$. Par une récurrence facile on montre :
$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad \forall x \in \mathbb{R} \qquad f(x+np) = f(x).$$
Comme f n'est pas constante il existe $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $f(a) \neq f(b)$. Notons $x_n = a + np$ et $y_n = b + np$. Supposons, par l'absurde, que f a une limite ℓ en $+\infty$. Comme $x_n \to +\infty$ alors $f(x_n) \to \ell$. Mais $f(x_n) = f(a+np) = f(a)$, donc $\ell = f(a)$. De même avec la suite (y_n): $y_n \to +\infty$ donc $f(y_n) \to \ell$ et $f(y_n) = f(b+np) = f(b)$, donc $\ell = f(b)$. Comme $f(a) \neq f(b)$ nous obtenons une contradiction.

2. Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction croissante et majorée par $M \in \mathbb{R}$. Notons
$$F = f(\mathbb{R}) = \{f(x) \mid x \in \mathbb{R}\}.$$
F est un ensemble (non vide) de $\mathbb{R}$, notons $\ell = \sup F$. Comme $M \in \mathbb{R}$ est un majorant de F, alors $\ell < +\infty$. Soit $\varepsilon > 0$, par les propriétés du sup il existe $y_0 \in F$ tel que $\ell - \varepsilon \leqslant y_0 \leqslant \ell$. Comme $y_0 \in F$, il existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tel que $f(x_0) = y_0$. Comme f est croissante alors:
$$\forall x \geqslant x_0 \qquad f(x) \geqslant f(x_0) = y_0 \geqslant \ell - \varepsilon.$$
De plus par la définition de ℓ:
$$\forall x \in \mathbb{R} \;\; f(x) \leqslant \ell.$$
Les deux propriétés précédentes s'écrivent:
$$\forall x \geqslant x_0 \qquad \ell - \varepsilon \leqslant f(x) \leqslant \ell.$$
Ce qui exprime bien que la limite de f en $+\infty$ est ℓ.

Correction de l'exercice 2 ▲

Généralement pour calculer des limites faisant intervenir des sommes de racines carrées, il est utile de faire intervenir "l'expression conjuguée":
$$\sqrt{a} - \sqrt{b} = \frac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})(\sqrt{a}+\sqrt{b})}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} = \frac{a-b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}.$$
Les racines au numérateur ont "disparu" en utilisant l'identité $(x-y)(x+y) = x^2 - y^2$.
Appliquons ceci sur un exemple :
$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{\sqrt{1+x^m}-\sqrt{1-x^m}}{x^n} \\ &= \frac{(\sqrt{1+x^m}-\sqrt{1-x^m})(\sqrt{1+x^m}+\sqrt{1-x^m})}{x^n(\sqrt{1+x^m}+\sqrt{1-x^m})} \\ &= \frac{1+x^m-(1-x^m)}{x^n(\sqrt{1+x^m}+\sqrt{1-x^m})} \\ &= \frac{2x^m}{x^n(\sqrt{1+x^m}+\sqrt{1-x^m})} \\ &= \frac{2x^{m-n}}{\sqrt{1+x^m}+\sqrt{1-x^m}} \end{aligned}$$

Et nous avons
$$\lim_{x \to 0} \frac{2}{\sqrt{1+x^m}+\sqrt{1-x^m}} = 1.$$
Donc l'étude de la limite de f en 0 est la même que celle de la fonction $x \mapsto x^{m-n}$.
Distinguons plusieurs cas pour la limite de f en 0.

- Si $m > n$ alors x^{m-n}, et donc $f(x)$, tendent vers 0.
- Si $m = n$ alors x^{m-n} et $f(x)$ tendent vers 1.
- Si $m < n$ alors $x^{m-n} = \frac{1}{x^{n-m}} = \frac{1}{x^k}$ avec $k = n-m$ un exposant positif. Si k est pair alors les limites à droite et à gauche de $\frac{1}{x^k}$ sont $+\infty$. Pour k impair la limite à droite vaut $+\infty$ et la limite à gauche vaut $-\infty$. Conclusion pour $k = n-m > 0$ pair, la limite de f en 0 vaut $+\infty$ et pour $k = n-m > 0$ impair *f n'a pas de limite en* 0 car les limites à droite et à gauche ne sont pas égales.

Correction de l'exercice 3 ▲

1. $\frac{x^2+2|x|}{x} = x + 2\frac{|x|}{x}$. Si $x > 0$ cette expression vaut $x+2$ donc la limite à droite en $x = 0$ est $+2$. Si $x < 0$ l'expression vaut -2 donc la limite à gauche en $x = 0$ est -2. Les limites à droite et à gauche sont différentes donc il n'y a pas de limite en $x = 0$.
2. $\frac{x^2+2|x|}{x} = x + 2\frac{|x|}{x} = x-2$ pour $x < 0$. Donc la limite quand $x \to -\infty$ est $-\infty$.
3. $\frac{x^2-4}{x^2-3x+2} = \frac{(x-2)(x+2)}{(x-2)(x-1)} = \frac{x+2}{x-1}$, lorsque $x \to 2$ cette expression tend vers 4.
4. $\frac{\sin^2 x}{1+\cos x} = \frac{1-\cos^2 x}{1+\cos x} = \frac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{1+\cos x} = 1-\cos x$. Lorsque $x \to \pi$ la limite est donc 2.
5. $\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1+x^2}}{x} = \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1+x^2}}{x} \times \frac{\sqrt{1+x}+\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1+x^2}} = \frac{1+x-(1+x^2)}{x(\sqrt{1+x}+\sqrt{1+x^2})} = \frac{x-x^2}{x(\sqrt{1+x}+\sqrt{1+x^2})} = \frac{1-x}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1+x^2}}$. Lorsque $x \to 0$ la limite vaut $\frac{1}{2}$.
6. $\sqrt{x+5}-\sqrt{x-3} = \left(\sqrt{x+5}-\sqrt{x-3}\right) \times \frac{\sqrt{x+5}+\sqrt{x-3}}{\sqrt{x+5}+\sqrt{x-3}} = \frac{x+5-(x-3)}{\sqrt{x+5}+\sqrt{x-3}} = \frac{8}{\sqrt{x+5}+\sqrt{x-3}}$. Lorsque $x \to +\infty$, la limite vaut 0.
7. Nous avons l'égalité $a^3-1 = (a-1)(1+a+a^2)$. Pour $a = \sqrt[3]{1+x^2}$ cela donne :
$$\frac{a-1}{x^2} = \frac{a^3-1}{x^2(1+a+a^2)} = \frac{1+x^2-1}{x^2(1+a+a^2)} = \frac{1}{1+a+a^2}.$$
Lors que $x \to 0$, alors $a \to 1$ et la limite cherchée est $\frac{1}{3}$.
Autre méthode : si l'on sait que la limite d'un taux d'accroissement correspond à la dérivée nous avons une méthode moins astucieuse. Rappel (ou anticipation sur un prochain chapitre) : pour une fonction f dérivable en a alors
$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(a).$$
Pour la fonction $f(x) = \sqrt[3]{1+x} = (1+x)^{\frac{1}{3}}$ ayant $f'(x) = \frac{1}{3}(1+x)^{-\frac{2}{3}}$ cela donne en $a = 0$:
$$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt[3]{1+x^2}-1}{x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{\sqrt[3]{1+x}-1}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = f'(0) = \frac{1}{3}.$$
8. $\frac{x^n-1}{x-1} = 1+x+x^2+\cdots+x^n$. Donc si $x \to 1$ la limite de $\frac{x^n-1}{x-1}$ est n. Donc la limite de $\frac{x-1}{x^n-1}$ en 1 est $\frac{1}{n}$.
La méthode avec le taux d'accroissement fonctionne aussi très bien ici. Soit $f(x) = x^n$, $f'(x) = nx^{n-1}$ et $a = 1$. Alors $\frac{x^n-1}{x-1} = \frac{f(x)-f(1)}{x-1}$ tend vers $f'(1) = n$.

Correction de l'exercice 4 ▲

1. Montrons d'abord que la limite de
$$f(x) = \frac{x^k - \alpha^k}{x - \alpha}$$
en α est $k\alpha^{k-1}$, k étant un entier fixé. Un calcul montre que $f(x) = x^{k-1} + \alpha x^{k-2} + \alpha^2 x^{k-3} + \cdots + \alpha^{k-1}$; en effet $(x^{k-1} + \alpha x^{k-2} + \alpha^2 x^{k-3} + \cdots + \alpha^{k-1})(x - \alpha) = x^k - \alpha^k$. Donc la limite en $x = \alpha$ est $k\alpha^{k-1}$. Une autre méthode consiste à dire que $f(x)$ est la taux d'accroissement de la fonction x^k, et donc la limite de f en α est exactement la valeur de la dérivée de x^k en α, soit $k\alpha^{k-1}$. Ayant fait ceci revenons à la limite de l'exercice : comme
$$\frac{x^{n+1} - \alpha^{n+1}}{x^n - \alpha^n} = \frac{x^{n+1} - \alpha^{n+1}}{x - \alpha} \times \frac{x - \alpha}{x^n - \alpha^n}.$$
Le premier terme du produit tend vers $(n+1)\alpha^n$ et le second terme, étant l'inverse d'un taux d'accroissement, tend vers $1/(n\alpha^{n-1})$. Donc la limite cherchée est
$$\frac{(n+1)\alpha^n}{n\alpha^{n-1}} = \frac{n+1}{n}\alpha.$$

2. La fonction $f(x) = \frac{\tan x - \sin x}{\sin x(\cos 2x - \cos x)}$ s'écrit aussi $f(x) = \frac{1 - \cos x}{\cos x(\cos 2x - \cos x)}$. Or $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$. Posons $u = \cos x$, alors
$$f(x) = \frac{1-u}{u(2u^2 - u - 1)} = \frac{1-u}{u(1-u)(-1-2u)} = \frac{1}{u(-1-2u)}$$
Lorsque x tend vers 0, $u = \cos x$ tend vers 1, et donc $f(x)$ tend vers $-\frac{1}{3}$.

3.
$$\begin{aligned}\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}} - \sqrt{x} &= \frac{\left(\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}} - \sqrt{x}\right)\left(\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}} + \sqrt{x}\right)}{\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}} + \sqrt{x}} \\ &= \frac{\sqrt{x + \sqrt{x}}}{\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}} + \sqrt{x}} \\ &= \frac{\sqrt{1 + \frac{1}{\sqrt{x}}}}{\sqrt{1 + \frac{\sqrt{x + \sqrt{x}}}{x}} + 1}\end{aligned}$$

Quand $x \to +\infty$ alors $\frac{1}{\sqrt{x}} \to 0$ et $\frac{\sqrt{x+\sqrt{x}}}{x} = \sqrt{\frac{1}{x} + \frac{1}{x\sqrt{x}}} \to 0$, donc la limite recherchée est $\frac{1}{2}$.

4. La fonction s'écrit
$$f(x) = \frac{\sqrt{x} - \sqrt{\alpha} - \sqrt{x - \alpha}}{\sqrt{x^2 - \alpha^2}} = \frac{\sqrt{x} - \sqrt{\alpha} - \sqrt{x - \alpha}}{\sqrt{x - \alpha}\sqrt{x + \alpha}} = \frac{\frac{\sqrt{x} - \sqrt{\alpha}}{\sqrt{x - \alpha}} - 1}{\sqrt{x + \alpha}}.$$
Notons $g(x) = \frac{\sqrt{x} - \sqrt{\alpha}}{\sqrt{x - \alpha}}$ alors à l'aide de l'expression conjuguée
$$g(x) = \frac{x - \alpha}{(\sqrt{x - \alpha})(\sqrt{x} + \sqrt{\alpha})} = \frac{\sqrt{x - \alpha}}{\sqrt{x} + \sqrt{\alpha}}.$$
Donc $g(x)$ tend vers 0 quand $x \to \alpha^+$. Et maintenant $f(x) = \frac{g(x) - 1}{\sqrt{x + \alpha}}$ tend vers $-\frac{1}{\sqrt{2\alpha}}$.

5. Pour tout réel y nous avons la double inégalité $y - 1 < E(y) \leqslant y$. Donc pour $y > 0$, $\frac{y-1}{y} < \frac{E(y)}{y} \leqslant 1$. On en déduit que lorsque y tend vers $+\infty$ alors $\frac{E(y)}{y}$ tend 1. On obtient le même résultat quand y tend vers $-\infty$. En posant $y = 1/x$, et en faisant tendre x vers 0, alors $xE(\frac{1}{x}) = \frac{E(y)}{y}$ tend vers 1.

6.
$$\frac{e^x-e^2}{x^2+x-6}=\frac{e^x-e^2}{x-2}\times\frac{x-2}{x^2+x-6}=\frac{e^x-e^2}{x-2}\times\frac{x-2}{(x-2)(x+3)}=\frac{e^x-e^2}{x-2}\times\frac{1}{x+3}.$$
La limite de $\frac{e^x-e^2}{x-2}$ en 2 vaut e^2 ($\frac{e^x-e^2}{x-2}$ est la taux d'accroissement de la fonction $x\mapsto e^x$ en la valeur $x=2$), la limite voulue est $\frac{e^2}{5}$.

7. Soit $f(x)=\frac{x^4}{1+x^\alpha\sin^2 x}$. Supposons $\alpha\geqslant 4$, alors on prouve que f n'a pas de limite en $+\infty$. En effet pour pour $u_k=2k\pi$, $f(2k\pi)=(2k\pi)^4$ tend vers $+\infty$ lorsque k (et donc u_k) tend vers $+\infty$. Cependant pour $v_k=2k\pi+\frac{\pi}{2}$, $f(v_k)=\frac{v_k^4}{1+v_k^\alpha}$ tend vers 0 (ou vers 1 si $\alpha=4$) lorsque k (et donc v_k) tend vers $+\infty$. Ceci prouve que $f(x)$ n'a pas de limite lorsque x tend vers $+\infty$.
Reste le cas $\alpha<4$. Il existe β tel que $\alpha<\beta<4$.
$$f(x)=\frac{x^4}{1+x^\alpha\sin^2 x}=\frac{x^{4-\beta}}{\frac{1}{x^\beta}+\frac{x^\alpha}{x^\beta}\sin^2 x}.$$
Le numérateur tend $+\infty$ car $4-\beta>0$. $\frac{1}{x^\beta}$ tend vers 0 ainsi que $\frac{x^\alpha}{x^\beta}\sin^2 x$ (car $\beta>\alpha$ et $\sin^2 x$ est bornée par 1). Donc le dénominateur tend vers 0 (par valeurs positives). La limite est donc de type $+\infty/0^+$ (qui n'est pas indéterminée !) et vaut donc $+\infty$.

Correction de l'exercice 5 ▲

1. Comme $-1\leqslant\sin\frac{1}{x}\leqslant+1$ alors $1\leqslant 2+\sin\frac{1}{x}\leqslant+3$. Donc pour $x>0$, nous obtenons $\frac{x}{3}\leqslant\frac{x}{2+\sin\frac{1}{x}}\leqslant x$. On obtient une inégalité similaire pour $x<0$. Cela implique $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{2+\sin\frac{1}{x}}=0$.

2. Sachant que $\frac{\ln(1+t)}{t}\to 1$ lorsque $t\to 0$, on peut le reformuler ainsi $\ln(1+t)=t\cdot\mu(t)$, pour une certaine fonction μ qui vérifie $\mu(t)\to 1$ lorsque $t\to 0$. Donc $\ln(1+e^{-x})=e^{-x}\mu(e^{-x})$. Maintenant
$$\begin{aligned}(\ln(1+e^{-x}))^{\frac{1}{x}}&=\exp\left(\frac{1}{x}\ln\left(\ln(1+e^{-x})\right)\right)\\&=\exp\left(\frac{1}{x}\ln\left(e^{-x}\mu(e^{-x})\right)\right)\\&=\exp\left(\frac{1}{x}\left(-x+\ln\mu(e^{-x})\right)\right)\\&=\exp\left(-1+\frac{\ln\mu(e^{-x})}{x}\right)\end{aligned}$$
$\mu(e^{-x})\to 1$ donc $\ln\mu(e^{-x})\to 0$, donc $\frac{\ln\mu(e^{-x})}{x}\to 0$ lorsque $x\to+\infty$.
Bilan : la limite est $\exp(-1)=\frac{1}{e}$.

3.

4. Sachant $\frac{e^x-1}{x}\to 1$ lorsque $x\to 0$, on reformule ceci en $e^x-1=x\cdot\mu(x)$, pour une certaine fonction μ qui vérifie $\mu(x)\to 1$ lorsque $x\to 0$. Cela donne $\ln(e^x-1)=\ln(x\cdot\mu(x))=\ln x+\ln\mu(x)$.
$$\begin{aligned}x^{\frac{1}{\ln(e^x-1)}}&=\exp\left(\frac{1}{\ln(e^x-1)}\ln x\right)\\&=\exp\left(\frac{1}{\ln x+\ln\mu(x)}\ln x\right)\\&=\exp\left(\frac{1}{1+\frac{\ln\mu(x)}{\ln x}}\right)\end{aligned}$$

Maintenant $\mu(x) \to 1$ donc $\ln \mu(x) \to 0$, et $\ln x \to -\infty$ lorsque $x \to 0$. Donc $\frac{\ln \mu(x)}{\ln x} \to 0$. Cela donne

$$\lim_{x \to 0^+} x^{\frac{1}{\ln(e^x-1)}} = \lim_{x \to 0^+} \exp\left(\frac{1}{1+\frac{\ln \mu(x)}{\ln x}}\right) = \exp(1) = e.$$

Correction de l'exercice 6 ▲

Soit

$$f(x) = \left(\frac{a^x+b^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}} = \exp\left(\frac{1}{x}\ln\left(\frac{a^x+b^x}{2}\right)\right)$$

$a^x \to 1$, $b^x \to 1$ donc $\frac{a^x+b^x}{2} \to 1$ lorsque $x \to 0$ et nous sommes face à une forme indéterminée. Nous savons que $\lim_{t\to 0} \frac{\ln(1+t)}{t} = 1$. Autrement dit il existe un fonction μ telle que $\ln(1+t) = t \cdot \mu(t)$ avec $\mu(t) \to 1$ lorsque $t \to 0$.

Appliquons cela à $g(x) = \ln\left(\frac{a^x+b^x}{2}\right)$. Alors

$$g(x) = \ln\left(1 + \left(\frac{a^x+b^x}{2} - 1\right)\right) = \left(\frac{a^x+b^x}{2} - 1\right) \cdot \mu(x)$$

où $\mu(x) \to 1$ lorsque $x \to 0$. (Nous écrivons pour simplifier $\mu(x)$ au lieu de $\mu(\frac{a^x+b^x}{2} - 1)$.)

Nous savons aussi que $\lim_{t\to 0} \frac{e^t-1}{t} = 1$. Autrement dit il existe un fonction ν telle que $e^t - 1 = t \cdot \nu(t)$ avec $\nu(t) \to 1$ lorsque $t \to 0$.

Appliquons ceci :

$$\begin{aligned}
\frac{a^x+b^x}{2} - 1 &= \frac{1}{2}(e^{x\ln a} + e^{x\ln b}) - 1 \\
&= \frac{1}{2}(e^{x\ln a} - 1 + e^{x\ln b} - 1) \\
&= \frac{1}{2}(x\ln a \cdot \nu(x\ln a) + x\ln b \cdot \nu(x\ln b)) \\
&= \frac{1}{2}x(\ln a \cdot \nu(x\ln a) + \ln b \cdot \nu(x\ln b))
\end{aligned}$$

Reste à rassembler tous les éléments du puzzle :

$$\begin{aligned}
f(x) &= \left(\frac{a^x+b^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}} \\
&= \exp\left(\frac{1}{x}\ln\left(\frac{a^x+b^x}{2}\right)\right) \\
&= \exp\left(\frac{1}{x}g(x)\right) \\
&= \exp\left(\frac{1}{x}\left(\frac{a^x+b^x}{2} - 1\right) \cdot \mu(x)\right) \\
&= \exp\left(\frac{1}{x} \cdot \frac{1}{2} \cdot x(\ln a \cdot \nu(x\ln a) + \ln b \cdot \nu(x\ln b)) \cdot \mu(x)\right) \\
&= \exp\left(\frac{1}{2}(\ln a \cdot \nu(x\ln a) + \ln b \cdot \nu(x\ln b)) \cdot \mu(x)\right)
\end{aligned}$$

Or $\mu(x) \to 1$, $\nu(x \ln a) \to 1$, $\nu(x \ln b) \to 1$ lorsque $x \to 0$. Donc

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \exp\left(\frac{1}{2}(\ln a + \ln b)\right) = \exp\left(\frac{1}{2}\ln(ab)\right) = \sqrt{ab}.$$

Correction de l'exercice 7 ▲

(a) $-\infty$

(b) 0

(c) $+\infty$

(d) $+\infty$

(e) $\frac{3}{2}$

(f) $-\infty$

(g) 0

(h) 0

(i) 0

(j) 0

(k) -2

(l) $-\infty$

(m) 1

(n) e^4

(o) 1

(p) e

(q) e

(r) 0

(s) 0

(t) 0
