Propriétés de $\mathbb{R}$

1 Les rationnels $\mathbb{Q}$

Exercice 1

1. Démontrer que si $r \in \mathbb{Q}$ et $x \notin \mathbb{Q}$ alors $r+x \notin \mathbb{Q}$ et si $r \neq 0$ alors $r.x \notin \mathbb{Q}$.
2. Montrer que $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$,
3. En déduire : entre deux nombres rationnels il y a toujours un nombre irrationnel.

Indication ▼ Correction ▼ Vidéo ■ [000451]

Exercice 2

Montrer que $\frac{\ln 3}{\ln 2}$ est irrationnel.

Indication ▼ Correction ▼ Vidéo ■ [000461]

Exercice 3

1. Soit $N_n = 0,1997\,1997\ldots 1997$ (n fois). Mettre N_n sous la forme $\frac{p}{q}$ avec $p,q \in \mathbb{N}^*$.
2. Soit $M = 0,1997\,1997\,1997\ldots\ldots$ Donner le rationnel dont l'écriture décimale est M.
3. Même question avec : $P = 0,11111\ldots + 0,22222\ldots + 0,33333\ldots + 0,44444\ldots + 0,55555\ldots + 0,66666\ldots + 0,77777\ldots + 0,88888\ldots + 0,99999\ldots$

Indication ▼ Correction ▼ Vidéo ■ [000459]

Exercice 4

Soit $p(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i \cdot x^i$. On suppose que tous les a_i sont des entiers.

1. Montrer que si p a une racine rationnelle $\frac{\alpha}{\beta}$ (avec α et β premiers entre eux) alors α divise a_0 et β divise a_n.
2. On considère le nombre $\sqrt{2}+\sqrt{3}$. En calculant son carré, montrer que ce carré est racine d'un polynôme de degré 2. En déduire, à l'aide du résultat précédent qu'il n'est pas rationnel.

Indication ▼ Correction ▼ Vidéo ■ [000457]

2 Maximum, minimum, borne supérieure...

Exercice 5

Le maximum de deux nombres x,y (c'est-à-dire le plus grand des deux) est noté $\max(x,y)$. De même on notera $\min(x,y)$ le plus petit des deux nombres x,y. Démontrer que :

$$\max(x,y) = \frac{x+y+|x-y|}{2} \quad \text{et} \quad \min(x,y) = \frac{x+y-|x-y|}{2}.$$

Trouver une formule pour $\max(x,y,z)$.

Indication ▼ Correction ▼ Vidéo ■ [000464]

Exercice 6

Déterminer la borne supérieure et inférieure (si elles existent) de : $A=\{u_n \mid n\in\mathbb{N}\}$ en posant $u_n=2^n$ si n est pair et $u_n=2^{-n}$ sinon.

Indication ▼ Correction ▼ Vidéo ■ [000465]

Exercice 7

Déterminer (s'ils existent) : les majorants, les minorants, la borne supérieure, la borne inférieure, le plus grand élément, le plus petit élément des ensembles suivants :

$$[0,1]\cap\mathbb{Q}\,,\quad]0,1[\cap\mathbb{Q}\,,\quad \mathbb{N}\,,\quad \left\{(-1)^n+\frac{1}{n^2}\mid n\in\mathbb{N}^*\right\}.$$

Correction ▼ Vidéo ■ [000466]

Exercice 8

Soient A et B deux parties bornées de $\mathbb{R}$. On note $A+B=\{a+b \mid (a,b)\in A\times B\}$.

1. Montrer que $\sup A+\sup B$ est un majorant de $A+B$.
2. Montrer que $\sup(A+B)=\sup A+\sup B$.

Indication ▼ Correction ▼ Vidéo ■ [000476]

Exercice 9

Soit A et B deux parties bornées de $\mathbb{R}$. **Vrai** ou **faux** ?

1. $A\subset B\Rightarrow \sup A\leqslant \sup B$,
2. $A\subset B\Rightarrow \inf A\leqslant \inf B$,
3. $\sup(A\cup B)=\max(\sup A,\sup B)$,
4. $\sup(A+B)<\sup A+\sup B$,
5. $\sup(-A)=-\inf A$,
6. $\sup A+\inf B\leqslant \sup(A+B)$.

Indication ▼ Correction ▼ Vidéo ■ [000477]

3 Divers

Exercice 10

Soit x un réel.

1. Donner l'encadrement qui définit la partie entière $E(x)$.
2. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite définie par $u_n=\dfrac{E(x)+E(2x)+\ldots+E(nx)}{n^2}$.
   Donner un encadrement simple de $n^2\times u_n$, qui utilise $\sum_{k=1}^n k$.
3. En déduire que (u_n) converge et calculer sa limite.
4. En déduire que $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

Indication ▼ Correction ▼ Vidéo ■ [005982]

Exercice 11

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad f(x+y) = f(x) + f(y).$$

Montrer que

1. $\forall n \in \mathbb{N} \qquad f(n) = n \cdot f(1).$
2. $\forall n \in \mathbb{Z} \qquad f(n) = n \cdot f(1).$
3. $\forall q \in \mathbb{Q} \qquad f(q) = q \cdot f(1).$
4. $\forall x \in \mathbb{R} \qquad f(x) = x \cdot f(1)$ si f est croissante.

Indication ▼ Correction ▼ Vidéo ■ [000497]

Indication pour l'exercice 1 ▲

1. Raisonner par l'absurde.
2. Raisonner par l'absurde en écrivant $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$ avec p et q premiers entre eux. Ensuite plusieurs méthodes sont possibles par exemple essayer de montrer que p et q sont tous les deux pairs.
3. Considérer $r + \frac{\sqrt{2}}{2}(r' - r)$ (faites un dessin !) pour deux rationnels r, r'. Puis utiliser les deux questions précédentes.

Indication pour l'exercice 2 ▲

Raisonner par l'absurde !

Indication pour l'exercice 3 ▲

1. Mutiplier N_n par une puissance de 10 suffisament grande pour obtenir un nombre entier.
2. Mutiplier M par une puissance de 10 suffisament grande (pas trop grande) puis soustraire M pour obtenir un nombre entier.

Indication pour l'exercice 4 ▲

1. Calculer $\beta^n p(\frac{\alpha}{\beta})$ et utiliser le lemme de Gauss.
2. Utiliser la première question avec $p(x) = (x^2 - 5)^2 - 24$.

Indication pour l'exercice 5 ▲

Distinguer des cas.

Indication pour l'exercice 6 ▲

$\inf A = 0$, A n'a pas de borne supérieure.

Indication pour l'exercice 8 ▲

Il faut revenir à la définition de la borne supérieure d'un ensemble borné : c'est le plus petit des majorants. En particulier la borne supérieure est un majorant.

Indication pour l'exercice 9 ▲

Deux propositions sont fausses...

Indication pour l'exercice 10 ▲

1. Rappelez-vous que la partie entière de x est le plus grand entier, inférieur ou égal à x. Mais il est ici préférable de donner la définition de $E(x)$ en disant que $E(x) \in \mathbb{Z}$ et que x vérifie un certain encadrement...
2. Encadrer $E(kx)$, pour $k = 1, \dots, n$.
3. Rappelez-vous d'abord de la formule $1 + 2 + \cdots + n$ puis utilisez le fameux théorème des gendarmes.
4. Les u_n ne seraient-ils pas des rationnels ?

Indication pour l'exercice 11 ▲

1. $f(2) = f(1+1) = \cdots$, faire une récurrence.
2. $f((-n)+n) = \cdots$.
3. Si $q = \frac{a}{b}$, calculer $f(\frac{a}{b} + \frac{a}{b} + \cdots + \frac{a}{b})$ avec b termes dans cette somme.
4. Utiliser la densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$: pour $x \in \mathbb{R}$ fixé, prendre une suite de rationnels qui croit vers x, et une autre qui décroit vers x.

Correction de l'exercice 1 ▲

1. Soit $r = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ et $x \notin \mathbb{Q}$. Par l'absurde supposons que $r + x \in \mathbb{Q}$ alors il existe deux entiers p', q' tels que $r + x = \frac{p'}{q'}$. Donc $x = \frac{p'}{q'} - \frac{p}{q} = \frac{qp' - pq'}{qq'} \in \mathbb{Q}$ ce qui est absurde car $x \notin \mathbb{Q}$.

   De la même façon si $r \cdot x \in \mathbb{Q}$ alors $r \cdot x = \frac{p'}{q'}$ Et donc $x = \frac{p'}{q'}\frac{q}{p}$. Ce qui est absurde.

2. *Méthode "classique"*. Supposons, par l'absurde, que $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$ alors il existe deux entiers p, q tels que $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$. De plus nous pouvons supposer que la fraction est irréductible (p et q sont premiers entre eux). En élevant l'égalité au carré nous obtenons $q^2 \times 2 = p^2$. Donc p^2 est un nombre pair, cela implique que p est un nombre pair (si vous n'êtes pas convaincu écrivez la contraposée "p impair $\Rightarrow p^2$ impair"). Donc $p = 2 \times p'$ avec $p' \in \mathbb{N}$, d'où $p^2 = 4 \times p'^2$. Nous obtenons $q^2 = 2 \times p'^2$. Nous en déduisons maintenant que q^2 est pair et comme ci-dessus que q est pair. Nous obtenons ainsi une contradiction car p et q étant tous les deux pairs la fraction $\frac{p}{q}$ n'est pas irréductible et aurait pu être simplifiée. Donc $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

   Autre méthode. Supposons par l'absurde que $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$. Alors $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$ pour deux entiers $p, q \in \mathbb{N}^*$. Alors nous avons $q \cdot \sqrt{2} \in \mathbb{N}$. Considérons l'ensemble suivant :

   $$\mathcal{N} = \left\{ n \in \mathbb{N}^* \mid n \cdot \sqrt{2} \in \mathbb{N} \right\}.$$

   Cet ensemble $\mathcal{N}$ est une partie de $\mathbb{N}^*$ qui est non vide car $q \in \mathcal{N}$. On peut alors prendre le plus petit élément de $\mathcal{N}$: $n_0 = \min \mathcal{N}$. En particulier $n_0 \cdot \sqrt{2} \in \mathbb{N}$. Définissons maintenant n_1 de la façon suivante : $n_1 = n_0 \cdot \sqrt{2} - n_0$. Il se trouve que n_1 appartient aussi à $\mathcal{N}$ car d'une part $n_1 \in \mathbb{N}$ (car n_0 et $n_0 \cdot \sqrt{2}$ sont des entiers) et d'autre part $n_1 \cdot \sqrt{2} = n_0 \cdot 2 - n_0 \cdot \sqrt{2} \in \mathbb{N}$. Montrons maintenant que n_1 est plus petit que n_0. Comme $0 < \sqrt{2} - 1 < 1$ alors $n_1 = n_0(\sqrt{2} - 1) < n_0$ et est non nul.

   Bilan : nous avons trouvé $n_1 \in \mathcal{N}$ strictement plus petit que $n_0 = \min \mathcal{N}$. Ceci fournit une contradiction. Conclusion : $\sqrt{2}$ n'est pas un nombre rationnel.

3. Soient r, r' deux rationnels avec $r < r'$. Notons $x = r + \frac{\sqrt{2}}{2}(r' - r)$. D'une part $x \in]r, r'[$ (car $0 < \frac{\sqrt{2}}{2} < 1$) et d'après les deux premières questions $\sqrt{2}\left(\frac{r'-r}{2}\right) \notin \mathbb{Q}$ donc $x \notin \mathbb{Q}$. Et donc x est un nombre irrationnel compris entre r et r'.

Correction de l'exercice 2 ▲

Par l'absurde supposons que $\frac{\ln 3}{\ln 2}$ soit un rationnel. Il s'écrit alors $\frac{p}{q}$ avec $p \geqslant 0, q > 0$ des entiers. On obtient $q \ln 3 = p \ln 2$. En prenant l'exponentielle nous obtenons : $\exp(q \ln 3) = \exp(p \ln 2)$ soit $3^q = 2^p$. Si $p \geqslant 1$ alors 2 divise 3^q donc 2 divise 3, ce qui est absurde. Donc $p = 0$. Ceci nous conduit à l'égalité $3^q = 1$, donc $q = 0$. La seule solution possible est $p = 0$, $q = 0$. Ce qui contredit $q \neq 0$. Donc $\frac{\ln 3}{\ln 2}$ est irrationnel.

Correction de l'exercice 3 ▲

1. Soit $p = 1997\,1997 \ldots 1997$ et $q = 1\,0000\,0000 \ldots 0000 = 10^{4n}$. Alors $N_n = \frac{p}{q}$.

2. Remarquons que $10\,000 \times M = 1997,1997\,1997 \ldots$ Alors $10\,000 \times M - M = 1997$; donc $9999 \times M = 1997$ d'où $M = \frac{1997}{9999}$.

3. $0,111\ldots = \frac{1}{9}$, $0,222\ldots = \frac{2}{9}$, etc. D'où $P = \frac{1}{9} + \frac{2}{9} + \cdots + \frac{9}{9} = \frac{1+2+\cdots+9}{9} = \frac{45}{9} = 5$.

Correction de l'exercice 4 ▲

1. Soit $\frac{\alpha}{\beta} \in \mathbb{Q}$ avec $\text{pgcd}(\alpha,\beta) = 1$. Pour $p(\frac{\alpha}{\beta}) = 0$, alors $\sum_{i=0}^{n} a_i \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^i = 0$. Après multiplication par β^n nous obtenons l'égalité suivante :
$$a_n\alpha^n + a_{n-1}\alpha^{n-1}\beta + \cdots + a_1\alpha\beta^{n-1} + a_0\beta^n = 0.$$
En factorisant tous les termes de cette somme sauf le premier par β, nous écrivons $a_n\alpha^n + \beta q = 0$. Ceci entraîne que β divise $a_n\alpha^n$, mais comme β et α^n sont premier entre eux alors par le lemme de Gauss β divise a_n. De même en factorisant par α tous les termes de la somme ci-dessus, sauf le dernier, nous obtenons $\alpha q' + a_0\beta^n = 0$ et par un raisonnement similaire α divise a_0.

2. Notons $\gamma = \sqrt{2} + \sqrt{3}$. Alors $\gamma^2 = 5 + 2\sqrt{2}\sqrt{3}$ Et donc $\left(\gamma^2 - 5\right)^2 = 4 \times 2 \times 3$, Nous choisissons $p(x) = (x^2-5)^2 - 24$, qui s'écrit aussi $p(x) = x^4 - 10x^2 + 1$. Vu notre choix de p, nous avons $p(\gamma) = 0$. Si nous supposons que γ est rationnel, alors $\gamma = \frac{\alpha}{\beta}$ et d'après la première question α divise le terme constant de p, c'est-à-dire 1. Donc $\alpha = \pm 1$. De même β divise le coefficient du terme de plus haut degré de p, donc β divise 1, soit $\beta = 1$. Ainsi $\gamma = \pm 1$, ce qui est évidemment absurde !

Correction de l'exercice 5 ▲

Explicitons la formule pour $\max(x,y)$. Si $x \geqslant y$, alors $|x-y| = x-y$ donc $\frac{1}{2}(x+y+|x-y|) = \frac{1}{2}(x+y+x-y) = x$. De même si $x \leqslant y$, alors $|x-y| = -x+y$ donc $\frac{1}{2}(x+y+|x-y|) = \frac{1}{2}(x+y-x+y) = y$.
Pour trois éléments, nous avons $\max(x,y,z) = \max\big(\max(x,y), z\big)$, donc d'après les formules pour deux éléments :
$$\begin{aligned}\max(x,y,z) &= \frac{\max(x,y) + z + |\max(x,y) - z|}{2}\\ &= \frac{\frac{1}{2}(x+y+|x-y|) + z + \left|\frac{1}{2}(x+y+|x-y|) - z\right|}{2}.\end{aligned}$$

Correction de l'exercice 6 ▲

$(u_{2k})_k$ tend vers $+\infty$ et donc A ne possède pas de majorant, ainsi A n'a pas de borne supérieure (cependant certains écrivent alors $\sup A = +\infty$). D'autre part toutes les valeurs de (u_n) sont positives et $(u_{2k+1})_k$ tend vers 0, donc $\inf A = 0$.

Correction de l'exercice 7 ▲

1. $[0,1] \cap \mathbb{Q}$. Les majorants : $[1,+\infty[$. Les minorants : $]-\infty,0]$. La borne supérieure : 1. La borne inférieure : 0. Le plus grand élément : 1. Le plus petit élément 0.
2. $]0,1[\cap \mathbb{Q}$. Les majorants : $[1,+\infty[$. Les minorants : $]-\infty,0]$. La borne supérieure : 1. La borne inférieure : 0. Il nexiste pas de plus grand élément ni de plus petit élément.
3. $\mathbb{N}$. Pas de majorants, pas de borne supérieure, ni de plus grand élément. Les minorants : $]-\infty,0]$. La borne inférieure : 0. Le plus petit élément : 0.
4. $\left\{(-1)^n + \frac{1}{n^2} \mid n \in \mathbb{N}^*\right\}$. Les majorants : $[\frac{5}{4},+\infty[$. Les minorants : $]-\infty,-1]$. La borne supérieure : $\frac{5}{4}$. La borne inférieure : -1. Le plus grand élément : $\frac{5}{4}$. Pas de plus petit élément.

Correction de l'exercice 8 ▲

1. Soient A et B deux parties bornées de $\mathbb{R}$. On sait que $\sup A$ est un majorant de A, c'est-à-dire, pour tout $a \in A$, $a \leqslant \sup A$. De même, pour tout $b \in B$, $b \leqslant \sup B$. On veut montrer que $\sup A + \sup B$ est un majorant de $A+B$. Soit donc $x \in A+B$. Cela signifie que x est de la forme $a+b$ pour un $a \in A$ et un $b \in B$. Or $a \leqslant \sup A$, et $b \leqslant \sup B$, donc $x = a+b \leqslant \sup A + \sup B$. Comme ce raisonnement est valide pour tout $x \in A+B$ cela signifie que $\sup A + \sup B$ est un majorant de $A+B$.

2. On veut montrer que, quel que soit $\varepsilon > 0$, $\sup A + \sup B - \varepsilon$ n'est pas un majorant de $A+B$. On prend donc un $\varepsilon > 0$ quelconque, et on veut montrer que $\sup A + \sup B - \varepsilon$ ne majore pas $A+B$. On s'interdit donc dans la suite de modifier ε. Comme $\sup A$ est le plus petit des majorants de A, $\sup A - \varepsilon/2$ n'est pas un majorant de A. Cela signifie qu'il existe un élément a de A tel que $a > \sup A - \varepsilon/2$. *Attention:* $\sup A - \varepsilon/2$ *n'est pas forcément dans A ;* $\sup A$ *non plus.* De la même manière, il existe $b \in B$ tel que $b > \sup B - \varepsilon/2$. Or l'élément x défini par $x = a+b$ est un élément de $A+B$, et il vérifie $x > (\sup A - \varepsilon/2) + (\sup B - \varepsilon/2) = \sup A + \sup B - \varepsilon$. Ceci implique que $\sup A + \sup B - \varepsilon$ n'est pas un majorant de $A+B$.

3. $\sup A + \sup B$ est un majorant de $A+B$ d'après la partie 1. Mais, d'après la partie 2., dès qu'on prend un $\varepsilon > 0$, $\sup A + \sup B - \varepsilon$ n'est pas un majorant de $A+B$. Donc $\sup A + \sup B$ est bien le plus petit des majorants de $A+B$, c'est donc la borne supérieure de $A+B$. Autrement dit $\sup(A+B) = \sup A + \sup B$.

Correction de l'exercice 9 ▲

1. Vrai.
2. Faux. C'est vrai avec l'hypothèse $B \subset A$ et non $A \subset B$.
3. Vrai.
4. Faux. Il y a égalité.
5. Vrai.
6. Vrai.

Correction de l'exercice 10 ▲

1. Par définition est l'unique nombre $E(x) \in \mathbb{Z}$ tel que
$$E(x) \leqslant x < E(x) + 1.$$

2. Pour le réel kx, $(k = 1, \ldots, n)$ l'encadrement précédent s'écrit $E(kx) \leqslant kx < E(kx) + 1$. Ces deux inégalités s'écrivent aussi $E(kx) \leqslant kx$ et $E(kx) > kx - 1$, d'où l'encadrement $kx - 1 < E(kx) \leqslant kx$. On somme cet encadrement, k variant de 1 à n, pour obtenir :
$$\sum_{k=1}^{n} (kx - 1) < \sum_{k=1}^{n} E(kx) \leqslant \sum_{k=1}^{n} kx.$$
Ce qui donne
$$x \cdot \sum_{k=1}^{n} k \quad - n < n^2 \cdot u_n \leqslant x \cdot \sum_{k=1}^{n} k.$$

3. On se rappelle que $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$ donc nous obtenons l'encadrement :
$$x \cdot \frac{1}{n^2} \cdot \frac{n(n+1)}{2} - \frac{1}{n} < u_n \leqslant x \cdot \frac{1}{n^2} \cdot \frac{n(n+1)}{2}.$$
$\frac{1}{n^2} \cdot \frac{n(n+1)}{2}$ tend vers $\frac{1}{2}$, donc par le théorème des gendarmes (u_n) tend vers $\frac{x}{2}$.

4. Chaque u_n est un rationnel (le numérateur et le dénominateur sont des entiers). Comme la suite (u_n) tend vers $\frac{x}{2}$, alors la suite de rationnels $(2u_n)$ tend vers x. Chaque réel $x \in \mathbb{R}$ peut être approché d'aussi près que l'on veut par des rationnels, donc $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

Correction de l'exercice 11 ▲

1. Calculons d'abord $f(0)$. Nous savons $f(1) = f(1+0) = f(1) + f(0)$, donc $f(0) = 0$. Montrons le résultat demandé par récurrence : pour $n = 1$, nous avons bien $f(1) = 1 \times f(1)$. Si $f(n) = nf(1)$ alors $f(n+1) = f(n) + f(1) = nf(1) + f(1) = (n+1)f(1)$.

2. $0 = f(0) = f(-1+1) = f(-1) + f(1)$. Donc $f(-1) = -f(1)$. Puis comme ci-dessus $f(-n) = nf(-1) = -nf(1)$.

3. Soit $q = \frac{a}{b}$. Alors $f(a) = f(\frac{a}{b} + \frac{a}{b} + \cdots + \frac{a}{b}) = f(\frac{a}{b}) + \cdots + f(\frac{a}{b})$ (b termes dans ces sommes). Donc $f(a) = bf(\frac{a}{b})$. Soit $af(1) = bf(\frac{a}{b})$. Ce qui s'écrit aussi $f(\frac{a}{b}) = \frac{a}{b}f(1)$.

4. Fixons $x \in \mathbb{R}$. Soit (α_i) une suite croissante de rationnels qui tend vers x. Soit (β_i) une suite décroissante de rationnels qui tend vers x :

$$\alpha_1 \leqslant \alpha_2 \leqslant \alpha_3 \leqslant \ldots \leqslant x \leqslant \cdots \leqslant \beta_2 \leqslant \beta_1.$$

   Alors comme $\alpha_i \leqslant x \leqslant \beta_i$ et que f est croissante nous avons $f(\alpha_i) \leqslant f(x) \leqslant f(\beta_i)$. D'après la question précédent cette inéquation devient : $\alpha_i f(1) \leqslant f(x) \leqslant \beta_i f(1)$. Comme (α_i) et (β_i) tendent vers x. Par le "théorème des gendarmes" nous obtenons en passant à la limite : $xf(1) \leqslant f(x) \leqslant xf(1)$. Soit $f(x) = xf(1)$.
