Fractions rationnelles

Corrections de Léa Blanc-Centi.

1 Fractions rationnelles

Exercice 1

Existe-t-il une fraction rationnelle F telle que

$$\big(F(X)\big)^2 = (X^2+1)^3 \quad ?$$

Indication ▼ Correction ▼ Vidéo ■ [006964]

Exercice 2

Soit $F = \frac{P}{Q}$ une fraction rationnelle écrite sous forme irréductible. On suppose qu'il existe une fraction rationnelle G telle que

$$G\left(\frac{P(X)}{Q(X)}\right) = X$$

1. Si $G = \frac{a_nX^n+\cdots+a_1X+a_0}{b_nX^n+\cdots+b_1X+b_0}$, montrer que P divise (a_0-b_0X) et que Q divise (a_n-b_nX).
2. En déduire que $F = \frac{P}{Q}$ est de la forme $F(X) = \frac{aX+b}{cX+d}$.
3. Pour $Y = \frac{aX+b}{cX+d}$, exprimer X en fonction de Y. En déduire l'expression de G.

Indication ▼ Correction ▼ Vidéo ■ [006965]

Exercice 3

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $P(X) = c(X-a_1)\cdots(X-a_n)$ (où les a_i sont des nombres complexes et où $c \neq 0$).

1. Exprimer à l'aide de P et de ses dérivées les sommes suivantes :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{X-a_k} \qquad \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(X-a_k)^2} \qquad \sum_{\substack{1\leqslant k,\ell\leqslant n \\ k\neq\ell}} \frac{1}{(X-a_k)(X-a_\ell)}$$

2. Montrer que si z est racine de P' mais pas de P, alors il existe $\lambda_1,\dots,\lambda_n$ des réels positifs ou nuls tels que $\sum_{k=1}^n \lambda_k = 1$ et $z = \sum_{k=1}^n \lambda_k a_k$. Si toutes les racines de P sont réelles, que peut-on en déduire sur les racines de P' ?

Indication ▼ Correction ▼ Vidéo ■ [006966]

2 Décompositions en éléments simples

Exercice 4

Décomposer les fractions suivantes en éléments simples sur $\mathbb{R}$, par identification des coefficients.

1. $F = \frac{X}{X^2-4}$
2. $G = \frac{X^3-3X^2+X-4}{X-1}$
3. $H = \frac{2X^3+X^2-X+1}{X^2-2X+1}$

4. $K = \frac{X+1}{X^4+1}$

Indication ▼ Correction ▼ Vidéo ■ [006967]

Exercice 5

Décomposer les fractions suivantes en éléments simples sur $\mathbb{R}$, en raisonnant par substitution pour obtenir les coefficients.

1. $F = \frac{X^5+X^4+1}{X^3-X}$
2. $G = \frac{X^3+X+1}{(X-1)^3(X+1)}$
3. $H = \frac{X}{(X^2+1)(X^2+4)}$
4. $K = \frac{2X^4+X^3+3X^2-6X+1}{2X^3-X^2}$

Indication ▼ Correction ▼ Vidéo ■ [006968]

Exercice 6

Décomposer les fractions suivantes en éléments simples sur $\mathbb{R}$.

1. À l'aide de divisions euclidiennes successives :
$$F = \frac{4X^6-2X^5+11X^4-X^3+11X^2+2X+3}{X(X^2+1)^3}$$
2. À l'aide d'une division selon les puissances croissantes :
$$G = \frac{4X^4-10X^3+8X^2-4X+1}{X^3(X-1)^2}$$
3. Idem pour :
$$H = \frac{X^4+2X^2+1}{X^5-X^3}$$
4. A l'aide du changement d'indéterminée $X = Y+1$:
$$K = \frac{X^5+X^4+1}{X(X-1)^4}$$

Indication ▼ Correction ▼ Vidéo ■ [006969]

Exercice 7

1. Décomposer les fractions suivantes en éléments simples sur $\mathbb{C}$.
$$\frac{(3-2i)X-5+3i}{X^2+iX+2} \qquad \frac{X+i}{X^2+i} \qquad \frac{2X}{(X+i)^2}$$
2. Décomposer les fractions suivantes en éléments simples sur $\mathbb{R}$, puis sur $\mathbb{C}$.
$$\frac{X^5+X+1}{X^4-1} \qquad \frac{X^2-3}{(X^2+1)(X^2+4)} \qquad \frac{X^2+1}{X^4+1}$$

Correction ▼ Vidéo ■ [006970]

3 Applications

Exercice 8

On pose $Q_0 = (X-1)(X-2)^2$, $Q_1 = X(X-2)^2$ et $Q_2 = X(X-1)$. À l'aide de la décomposition en éléments simples de $\frac{1}{X(X-1)(X-2)^2}$, trouver des polynômes $A_0,\ A_1,\ A_2$ tels que $A_0Q_0 + A_1Q_1 + A_2Q_2 = 1$. Que peut-on en déduire sur Q_1, Q_2 et Q_3 ?

Correction ▼ Vidéo ■ [006971]

Exercice 9

Soit $T_n(x) = \cos\left(n \arccos(x)\right)$ pour $x \in [-1,1]$.

1. (a) Montrer que pour tout $\theta \in [0,\pi]$, $T_n(\cos\theta) = \cos(n\theta)$.
   (b) Calculer T_0 et T_1.
   (c) Montrer la relation de récurrence $T_{n+2}(x) = 2xT_{n+1}(x) - T_n(x)$, pour tout $n \geqslant 0$.
   (d) En déduire que T_n une fonction polynomiale de degré n.
2. Soit $P(X) = \lambda(X-a_1)\cdots(X-a_n)$ un polynôme, où les a_k sont deux à deux distincts et $\lambda \neq 0$. Montrer que
$$\frac{1}{P(X)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\frac{1}{P'(a_k)}}{X-a_k}$$
3. Décomposer $\frac{1}{T_n}$ en éléments simples.

Indication ▼ Correction ▼ [006972]

Indication pour l'exercice 1 ▲

Écrire $F = \frac{P}{Q}$ sous forme irréductible.

Indication pour l'exercice 2 ▲

Écrire $G = \frac{A}{B}$ sous forme irréductible (on pourra choisir par exemple $n = \max(\deg A, \deg B)$).

Indication pour l'exercice 3 ▲

Considérer P'/P et sa dérivée, et enfin P''/P.

Indication pour l'exercice 4 ▲

Pour G et H, commencer par faire une division euclidienne pour trouver la partie polynomiale.

Indication pour l'exercice 5 ▲

Les fractions F, K ont une partie polynomiale, elles s'écrivent
$F = X^2 + X + 1 + \frac{X^2+X+1}{X^3-X}$
$K = X + 1 + \frac{4X^2-6X+1}{2X^3-X^2}$

Indication pour l'exercice 6 ▲

Pour F, commencer par écrire $F = \frac{a}{X} + F_1$ où $F_1 = \frac{N}{(X^2+1)^3}$ puis diviser N par X^2+1. Pour K, commencer par obtenir $K = 1 + \frac{1}{X} + K_1$, puis faire le changement d'indéterminée dans K_1.

Indication pour l'exercice 9 ▲

Pour 1. exprimer $\cos\big((n+2)\theta\big)$ et $\cos(n\theta)$ en fonction de $\cos\big((n+1)\theta\big)$. Pour 3. chercher les racines de T_n : $\omega_k = \cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{2n}\right)$ pour $k = 0, \ldots, n-1$.

Correction de l'exercice 1 ▲

Écrivons $F(X) = \frac{P(X)}{Q(X)}$ avec P et Q deux polynômes premiers entre eux, avec Q unitaire. La condition $\big(F(X)\big)^2 = (X^2+1)^3$ devient $P^2 = (X^2+1)^3 Q^2$. Ainsi Q^2 divise P^2. D'où $Q^2 = 1$, puisque P^2 et Q^2 sont premiers entre eux. Donc $Q = 1$ (ou -1). Ainsi $F = P$ est un polynôme et $P^2 = (X^2+1)^3$.
En particulier P^2 est de degré 6, donc P doit être de degré 3. Écrivons $P = aX^3 + bX^2 + cX + d$, on développe l'identité $P^2 = (X^2+1)^3$:

$$X^6 + 3X^4 + 3X^2 + 1 =$$
$$a^2X^6 + 2abX^5 + (2ac+b^2)X^4 + (2ad+2bc)X^3 + (2bd+c^2)X^2 + 2cdX + d^2$$

On identifie les coefficients : pour le coefficient de X^6, on a $a = \pm 1$, puis pour le coefficient de X^5, on a $b = 0$; pour le coefficient de 1, on a $d = \pm 1$, puis pour le coefficient de X, on a $c = 0$. Mais alors le coefficient de X^3 doit vérifier $2ad + 2bc = 0$, ce qui est faux.
Ainsi aucun polynôme ne vérifie l'équation $P^2 = (X^2+1)^3$, et par le raisonnement du début, aucune fraction non plus.

Correction de l'exercice 2 ▲

1. Posons $G = \frac{A}{B}$ et $F = \frac{P}{Q}$ (avec A, B, P, Q des polynômes). On réécrit l'identité $G(F(X)) = X$ sous la forme $A(F(X)) = XB(F(X))$. Posons $n = \max(\deg A, \deg B)$. Alors $n \geqslant 1$ car sinon, A et B seraient constants et $G(\frac{P}{Q}) = X$ aussi.
   On a donc $A = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ et $B = \sum_{k=0}^{n} b_k X^k$, où $(a_n, b_n) \neq (0,0)$, et l'identité devient
   $$\sum_{k=0}^{n} a_k \left(\frac{P}{Q}\right)^k = X \sum_{k=0}^{n} b_k \left(\frac{P}{Q}\right)^k$$
   En multipliant par Q^n, cela donne
   $$\sum_{k=0}^{n} a_k P^k Q^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} b_k X P^k Q^{n-k}.$$
   Donc
   $$(a_0 - b_0X)Q^n \quad + \quad (\cdots + (a_k - b_kX)P^kQ^{n-k} + \cdots) \quad + \quad (a_n - b_nX)P^n = 0$$
   où les termes dans la parenthèse centrale sont tous divisibles par P et par Q. Comme Q divise aussi le premier terme, alors Q divise $(a_n - b_nX)P^n$. D'après le lemme de Gauss, puisque P et Q sont premiers entre eux, alors Q divise $(a_n - b_nX)$. De même, P divise tous les termes de la parenthèse centrale et le dernier, donc P divise aussi $(a_0 - b_0X)Q^n$, donc P divise $(a_0 - b_0X)$.
2. Supposons de plus qu'on a écrit $G = \frac{A}{B}$ sous forme irréductible, c'est-à-dire avec $\operatorname{pgcd}(A,B) = 1$. Vu que a_n et b_n ne sont pas tous les deux nuls, alors $a_n - b_nX$ n'est pas le polynôme nul. Comme Q divise $a_n - b_nX$ alors nécessairement Q est de degré au plus 1 ; on écrit $Q(X) = cX + d$. Par ailleurs, $a_0 - b_0X$ n'est pas non plus le polynôme nul, car sinon on aurait $a_0 = b_0 = 0$ et donc A et B seraient tous les deux sans terme constant, donc divisibles par X (ce qui est impossible puisqu'ils sont premiers entre eux). Donc P est aussi de degré au plus 1 et on écrit $P(X) = aX + b$. Conclusion : $F(X) = \frac{aX+b}{cX+d}$. Notez que a et b ne sont pas tous les deux nuls en même temps (de même pour b et d).
3. Si $Y = \frac{aX+b}{cX+d}$ avec $(a,b) \neq (0,0)$, alors $X = -\frac{dY-b}{cY-a}$. Autrement dit si on note $\phi(X) = \frac{aX+b}{cX+d}$, alors sa bijection réciproque est $\phi^{-1}(Y) = -\frac{dY-b}{cY-a}$.
   Nous avons prouvé que $G\left(\frac{aX+b}{cX+d}\right) = X$. Cette identité s'écrit $G\big(\phi(X)\big) = X$. Appliquée en $X = \phi^{-1}(Y)$ elle devient $G\big(\phi(\phi^{-1}(Y))\big) = \phi^{-1}(Y)$, c'est-à-dire $G(Y) = \phi^{-1}(Y)$. Ainsi $G(Y) = -\frac{dY-b}{cY-a}$.

Correction de l'exercice 3 ▲

1. (a) Puisque $P(X) = c(X-a_1)\cdots(X-a_n)$:

$$\begin{aligned} P'(X) = \quad & c(X-a_2)\cdots(X-a_n) + c(X-a_1)(X-a_3)\cdots(X-a_n) \\ & + \cdots + c(X-a_1)\cdots(X-a_{k-1})(X-a_{k+1})\cdots(X-a_n) \\ & + \cdots + c(X-a_1)\cdots(X-a_{n-1}) \end{aligned}$$

La dérivée est donc la somme des termes de la forme : $\frac{c(X-a_1)\cdots(X-a_n)}{X-a_k} = \frac{P(X)}{X-a_k}$.
Ainsi

$$P'(X) = \frac{P(X)}{X-a_1} + \cdots + \frac{P(X)}{X-a_k} + \cdots + \frac{P(X)}{X-a_n}.$$

Donc :

$$\frac{P'}{P} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{X-a_k}$$

(b) Puisque $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(X-a_k)^2}$ est la dérivée de $-\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{X-a_k}$, on obtient par dérivation de $-\frac{P'}{P}$:

$$\frac{P'^2 - PP''}{P^2} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(X-a_k)^2}$$

(c) On a remarqué que la dérivée de P' est la somme de facteurs $c(X-a_1)\cdots(X-a_n)$ avec un des facteurs en moins, donc de la forme $\frac{c(X-a_1)\cdots(X-a_n)}{X-a_k} = \frac{P}{X-a_k}$. De même P'' est la somme de facteurs $c(X-a_1)\cdots(X-a_n)$ avec deux facteurs en moins, c'est-à-dire de la forme $\frac{c(X-a_1)\cdots(X-a_n)}{(X-a_k)(X-a_\ell)} = \frac{P}{(X-a_k)(X-a_\ell)}$:

$$P'' = \sum_{\substack{1\leqslant k,\ell\leqslant n \\ k\neq \ell}} \frac{P}{(X-a_k)(X-a_\ell)} \quad \text{donc} \quad \frac{P''}{P} = \sum_{\substack{1\leqslant k,\ell\leqslant n \\ k\neq \ell}} \frac{1}{(X-a_k)(X-a_\ell)}$$

2. On applique l'identité $\frac{P'(X)}{P(X)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{X-a_k}$ en z avec les hypothèses $P(z) \neq 0$ et $P'(z) = 0$. On en déduit $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{z-a_k} = 0$. L'expression conjuguée est aussi nulle :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\overline{z-a_k}} = \sum_{k=1}^{n} \frac{z-a_k}{|z-a_k|^2} = 0$$

Posons $\mu_k = \frac{1}{|z-a_k|^2}$. Alors

$$\sum_{k=1}^{n} \mu_k(z-a_k) = 0 \quad \text{donc} \quad \left(\sum_{k=1}^{n} \mu_k\right) z = \sum_{k=1}^{n} \mu_k a_k$$

Posons $\lambda_k = \mu_k / (\sum_{k=1}^{n} \mu_k)$, alors :
— Les λ_k sont des réels positifs.
— $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k = 1$
— Et $z = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k a_k$.
En particulier si les a_k sont tous des nombres réels, alors z est aussi un nombre réel. On vient de prouver que si un polynôme P a toutes ses racines réelles, alors P' a aussi toutes ses racines réelles. On a même plus : si on ordonne les racines réelles de P en $a_1 \leqslant a_2 \leqslant \cdots \leqslant a_n$ alors une racine z de P' est réelle et vérifie $a_1 \leqslant z \leqslant a_n$.
Plus généralement, l'interprétation géométrique de ce que l'on vient de prouver s'appelle le théorème de Gauss-Lucas : «Les racines de P' sont dans l'enveloppe convexe des racines (réelles ou complexes) de P.»

Correction de l'exercice 4 ▲

---

1. $F = \frac{X}{X^2-4}$.
Commençons par factoriser le dénominateur : $X^2-4 = (X-2)(X+2)$, d'où une décomposition en éléments simples du type $F = \frac{a}{X-2} + \frac{b}{X+2}$. En réduisant au même dénominateur, il vient $\frac{X}{X^2-4} = \frac{(a+b)X+2(a-b)}{X^2-4}$ et en identifiant les coefficients, on obtient le système $\begin{cases} a+b=1 \\ 2(a-b)=0 \end{cases}$. Ainsi $a=b=\frac{1}{2}$ et

$$\frac{X}{X^2-4} = \frac{\frac{1}{2}}{X-2} + \frac{\frac{1}{2}}{X+2}$$

2. $G = \frac{X^3-3X^2+X-4}{X-1}$.
Lorsque le degré du numérateur (ici 3) est supérieur ou égal au degré du dénominateur (ici 1), il faut effectuer la division euclidienne du numérateur par le dénominateur pour faire apparaître la partie polynomiale (ou partie entière). Ici la division euclidienne s'écrit $X^3-3X^2+X-4 = (X-1)(X^2-2X-1)-5$. Ainsi en divisant les deux membres par $X-1$ on obtient

$$\frac{X^3-3X^2+X-4}{X-1} = X^2-2X-1-\frac{5}{X-1}$$

La fraction est alors déjà décomposée en éléments simples.

3. $H = \frac{2X^3+X^2-X+1}{X^2-2X+1}$.
Commençons par faire la division euclidienne du numérateur par le dénominateur : $2X^3+X^2-X+1 = (X^2-2X+1)(2X+5)+7X-4$, ce qui donne $H = 2X+5+\frac{7X-4}{X^2-2X+1}$. Il reste à décomposer en éléments simples la fraction rationnelle $H_1 = \frac{7X-4}{X^2-2X+1}$. Puisque le dénominateur se factorise en $(X-1)^2$, elle sera de la forme $H_1 = \frac{a}{(X-1)^2} + \frac{b}{X-1}$. En réduisant au même dénominateur, il vient $\frac{7X-4}{X^2-2X+1} = \frac{bX+a-b}{X^2-2X+1}$ et en identifiant les coefficients, on obtient $b=7$ et $a=3$. Finalement,

$$\frac{2X^3+X^2-X+1}{X^2-2X+1} = 2X+5+\frac{3}{(X-1)^2}+\frac{7}{X-1}$$

4. $K = \frac{X+1}{X^4+1}$.
Ici, il n'y a pas de partie polynomiale puisque le degré du numérateur est strictement inférieur au degré du dénominateur. Le dénominateur admet quatre racines complexes $e^{\frac{i\pi}{4}}, e^{\frac{3i\pi}{4}}, e^{\frac{5i\pi}{4}} = e^{-\frac{3i\pi}{4}}$ et $e^{\frac{7i\pi}{4}} = e^{-\frac{i\pi}{4}}$. En regroupant les racines complexes conjuguées, on obtient sa factorisation sur $\mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} X^4+1 &= \left((X-e^{\frac{i\pi}{4}})(X-e^{-\frac{i\pi}{4}})\right)\left((X-e^{\frac{3i\pi}{4}})(X-e^{-\frac{3i\pi}{4}})\right) \\ &= \left(X^2-2\cos\tfrac{\pi}{4}+1\right)\left(X^2-2\cos\tfrac{3\pi}{4}+1\right) \\ &= (X^2-\sqrt{2}X+1)(X^2+\sqrt{2}X+1) \end{aligned}$$

Puisque les deux facteurs $(X^2-\sqrt{2}X+1)$ et $(X^2+\sqrt{2}X+1)$ sont irréductibles sur $\mathbb{R}$, la décomposition en éléments simples de K est de la forme $K = \frac{aX+b}{X^2-\sqrt{2}X+1} + \frac{cX+d}{X^2+\sqrt{2}X+1}$.
En réduisant au même dénominateur et en identifiant les coefficients avec ceux de $K = \frac{X+1}{X^4+1}$, on obtient le système

$$\begin{cases} a+c=0 \\ \sqrt{2}a+b-\sqrt{2}c+d=0 \\ a+\sqrt{2}b+c-\sqrt{2}d=1 \\ b+d=1 \end{cases}$$

Système que l'on résout en $a = \frac{-\sqrt{2}}{4}$, $c = \frac{\sqrt{2}}{4}$, $b = \frac{2+\sqrt{2}}{4}$ et $d = \frac{2-\sqrt{2}}{4}$. Ainsi

$$\frac{X+1}{X^4+1} = \frac{-\frac{\sqrt{2}}{4}X+\frac{2+\sqrt{2}}{4}}{X^2-\sqrt{2}X+1} + \frac{\frac{\sqrt{2}}{4}X+\frac{2-\sqrt{2}}{4}}{X^2+\sqrt{2}X+1}$$

Correction de l'exercice 5 ▲

---

1. $F = \frac{X^5+X^4+1}{X^3-X}$.
Pour obtenir la partie polynomiale, on fait une division euclidienne : $X^5+X^4+1 = (X^3-X)(X^2+X+1)+X^2+X+1$. Ce qui donne $F = X^2+X+1+F_1$, où $F_1 = \frac{X^2+X+1}{X^3-X}$. Puisque $X^3-X = X(X-1)(X+1)$, la décomposition en éléments simples est de la forme

$$F_1 = \frac{X^2+X+1}{X(X-1)(X+1)} = \frac{a}{X} + \frac{b}{X-1} + \frac{c}{X+1}$$

Pour obtenir a :
— on multiplie l'égalité par X : $\frac{X(X^2+X+1)}{X(X-1)(X+1)} = X\left(\frac{a}{X} + \frac{b}{X-1} + \frac{c}{X+1}\right)$,
— on simplifie $\frac{X^2+X+1}{(X-1)(X+1)} = a + \frac{bX}{X-1} + \frac{cX}{X+1}$,
— on remplace X par 0 et on obtient $-1 = a+0+0$, donc $a = -1$.
De même, en multipliant par $X-1$ et en remplaçant X par 1, il vient $b = \frac{3}{2}$. Puis en multipliant par $X+1$ et en remplaçant X par -1, on trouve $c = \frac{1}{2}$.
D'où

$$\frac{X^5+X^4+1}{X^3-X} = X^2+X+1 - \frac{1}{X} + \frac{\frac{1}{2}}{X+1} + \frac{\frac{3}{2}}{X-1}$$

2. $G = \frac{X^3+X+1}{(X-1)^3(X+1)}$.
La partie polynomiale est nulle. La décomposition en éléments simples est de la forme $G = \frac{a}{(X-1)^3} + \frac{b}{(X-1)^2} + \frac{c}{X-1} + \frac{d}{X+1}$.
— En multipliant les deux membres de l'égalité par $(X-1)^3$, en simplifiant puis en remplaçant X par 1, on obtient $a = \frac{3}{2}$.
— De même, en multipliant par $X+1$, en simplifiant puis en remplaçant X par -1, on obtient $d = \frac{1}{8}$.
— En multipliant par X et en regardant la limite quand $X \to +\infty$, on obtient $1 = c+d$. Donc $c = \frac{7}{8}$.
— En remplaçant X par 0, il vient $-1 = -a+b-c+d$. Donc $b = \frac{5}{4}$.
Ainsi :

$$G = \frac{X^3+X+1}{(X-1)^3(X+1)} = \frac{\frac{3}{2}}{(X-1)^3} + \frac{\frac{5}{4}}{(X-1)^2} + \frac{\frac{7}{8}}{X-1} + \frac{\frac{1}{8}}{X+1}$$

3. $H = \frac{X}{(X^2+1)(X^2+4)}$.
Puisque X^2+1 et X^2+4 sont irréductibles sur $\mathbb{R}$, la décomposition en éléments simples sera de la forme

$$\frac{X}{(X^2+1)(X^2+4)} = \frac{aX+b}{X^2+1} + \frac{cX+d}{X^2+4}$$

— En remplaçant X par 0, on obtient $0 = b + \frac{1}{4}d$.
— En multipliant les deux membres par X, on obtient $\frac{X^2}{(X^2+1)(X^2+4)} = \frac{aX^2+bX}{X^2+1} + \frac{cX^2+dX}{X^2+4}$. En calculant la limite quand $X \to +\infty$, on a $0 = a+c$.
— Enfin, en évaluant les fractions en $X = 1$ et $X = -1$, on obtient $\frac{1}{10} = \frac{a+b}{2} + \frac{c+d}{5}$ et $\frac{-1}{10} = \frac{-a+b}{2} + \frac{-c+d}{5}$.
La résolution du système donne $b = d = 0$, $a = \frac{1}{3}$, $c = -\frac{1}{3}$ et donc

$$\frac{X}{(X^2+1)(X^2+4)} = \frac{\frac{1}{3}X}{X^2+1} - \frac{\frac{1}{3}X}{X^2+4}$$

4. $K = \frac{2X^4+X^3+3X^2-6X+1}{2X^3-X^2}$.
Pour la partie polynomiale, on fait la division euclidienne :

$$2X^4+X^3+3X^2-6X+1 = (2X^3-X^2)(X+1) + (4X^2-6X+1)$$

ce qui donne $K = X+1+K_1$ où $K_1 = \frac{4X^2-6X+1}{2X^3-X^2}$. Pour trouver la décomposition en éléments simples de K_1, on factorise son numérateur : $2X^3-X^2 = 2X^2(X-\frac{1}{2})$, ce qui donne une décomposition de la forme $K_1 = \frac{a}{X^2} + \frac{b}{X} + \frac{c}{X-\frac{1}{2}}$.

On obtient alors a en multipliant les deux membres de l'égalité par X^2 puis en remplaçant X par 0 : $a=-1$. On obtient de même c en multipliant par $X-\frac{1}{2}$ et en remplaçant X par $\frac{1}{2}$: $c=-2$. Enfin on trouve b en identifiant pour une valeur particulière non encore utilisée, par exemple $X=1$, ou mieux en multipliant les deux membres par X et en passant à la limite pour $X\to+\infty$: $b=4$. Finalement :

$$\frac{2X^4+X^3+3X^2-6X+1}{2X^3-X^2}=X+1-\frac{1}{X^2}+\frac{4}{X}-\frac{2}{X-\frac{1}{2}}$$

Correction de l'exercice 6 ▲

1. $F=\frac{4X^6-2X^5+11X^4-X^3+11X^2+2X+3}{X(X^2+1)^3}$.
   (a) La décomposition en éléments simples de F est de la forme $F=\frac{a}{X}+\frac{bX+c}{(X^2+1)^3}+\frac{dX+e}{(X^2+1)^2}+\frac{fX+g}{X^2+1}$. Il est difficile d'obtenir les coefficients par substitution.
   (b) On va ici se contenter de trouver a : on multiplie F par X, puis on remplace X par 0, on obtient $a=3$.
   (c) On fait la soustraction $F_1=F-\frac{a}{X}$. On sait que la fraction F_1 *doit* se simplifier par X. On trouve $F_1=\frac{X^5-2X^4+2X^3-X^2+2X+2}{(X^2+1)^3}$.
   (d) La fin de la décomposition se fait par divisions euclidiennes successives. Tout d'abord la division du numérateur $X^5-2X^4+2X^3-X^2+2X+2$ par X^2+1 :

   $$X^5-2X^4+2X^3-X^2+2X+2=(X^2+1)(X^3-2X^2+X+1)+X+1$$

   puis on recommence en divisant le quotient obtenu par X^2+1, pour obtenir

   $$X^5-2X^4+2X^3-X^2+2X+2=(X^2+1)\big((X^2+1)(X-2)+3\big)+X+1$$

   On divise cette identité par $(X^2+1)^3$:
   $F_1=\frac{(X^2+1)\big((X^2+1)(X-2)+3\big)+X+1}{(X^2+1)^3}=\frac{X+1}{(X^2+1)^3}+\frac{3}{(X^2+1)^2}+\frac{X-2}{X^2+1}$
   Ainsi

   $$F=\frac{3}{X}+\frac{X+1}{(X^2+1)^3}+\frac{3}{(X^2+1)^2}+\frac{X-2}{X^2+1}$$

   Remarque : cette méthode des divisions successives est très pratique quand la fraction à décomposer a un dénominateur *simple*, c'est à dire comportant un dénominateur du type Q^n où Q est du premier degré, ou du second degré sans racine réelle.
2. $G=\frac{4X^4-10X^3+8X^2-4X+1}{X^3(X-1)^2}$.
   La décomposition en éléments simples de G est de la forme $\frac{a}{X^3}+\frac{b}{X^2}+\frac{c}{X}+\frac{d}{(X-1)^2}+\frac{e}{X-1}$. La méthode la plus efficace pour déterminer les coefficients est d'effectuer une division suivant les puissances croissantes, ici à l'ordre 2 (de sorte que le reste soit divisible par X^3 comme le dénominateur). On calcule la division suivant les puissances croissantes, à l'ordre 2 du numérateur $1-4X+8X^2-10X^3+4X^4$ par $(X-1)^2$, ou plutôt par $1-2X+X^2$:

   $$1-4X+8X^2-10X^3+4X^4=(1-2X+X^2)(1-2X+3X^2)+(-2X^3+X^4)$$

   Remarquer que le reste $-2X^3+X^4$ est divisible par X^3.
   En divisant les deux membres de cette identité par $X^3(X-1)^2$, on obtient a, b et c d'un seul coup :

   $$\begin{aligned} G &= \frac{4X^4-10X^3+8X^2-4X+1}{X^3(X-1)^2} \\ &= \frac{(X-1)^2(1-2X+3X^2)+(-2X^3+X^4)}{X^3(X-1)^2} \\ &= \frac{1}{X^3}-\frac{2}{X^2}+\frac{3}{X}+\frac{X-2}{(X-1)^2} \end{aligned}$$

   Il reste à trouver d et e : par exemple en faisant la division euclidienne de $X-2$ par $X-1$: $X-2=(X-1)-1$.

   $$G=\frac{1}{X^3}-\frac{2}{X^2}+\frac{3}{X}-\frac{1}{(X-1)^2}+\frac{1}{X-1}$$

3. $H=\frac{X^4+2X^2+1}{X^5-X^3}=\frac{X^4+2X^2+1}{X^3(X-1)(X+1)}$.
La décomposition sera de la forme $H=\frac{a}{X^3}+\frac{b}{X^2}+\frac{c}{X}+\frac{d}{X-1}+\frac{e}{X+1}$. Pour obtenir a,b,c, on fait la division du numérateur par $(X-1)(X+1)=X^2-1$ selon les puissances croissantes, à l'ordre 2 (de sorte que le reste soit divisible par X^3 qui est la puissance de X au dénominateur de H, en fait on l'obtient à l'ordre 3) :
$$1+2X^2+X^4=(-1+X^2)(-1-3X^2)+4X^4$$
ce qui donne directement
$$\begin{aligned} H &= \frac{X^4+2X^2+1}{X^3(X-1)(X+1)} \\ &= \frac{(X^2-1)(-1-3X^2)+4X^4}{X^3(X^2-1)} \\ &= -\frac{1}{X^3}-\frac{3}{X}+\frac{4X}{X^2-1} \end{aligned}$$
Il reste à décomposer $\frac{4X}{X^2-1}=\frac{d}{X-1}+\frac{e}{X+1}$. On trouve $d=e=2$, d'où
$$H=\frac{X^4+2X^2+1}{X^5-X^3}=-\frac{1}{X^3}-\frac{3}{X}+\frac{2}{X-1}+\frac{2}{X+1}$$
Remarque : la méthode de division selon les puissances croissantes est efficace pour un exposant assez grand (en gros à partir de 3) dans une fraction du type $\frac{P(X)}{X^nQ(X)}$. Elle peut être utilisée pour une fraction du type $\frac{P(X)}{(X-a)^nQ(X)}$, mais il faut commencer par le changement de variable $Y=X-a$ avant de faire la division, puis bien entendu revenir à la variable X.
4. $K=\frac{X^5+X^4+1}{X(X-1)^4}$.
Puisque le degré du numérateur N est supérieur ou égal à celui du dénominateur D, il y a une partie polynomiale. N et D étant de même degré, avec le même coefficient dominant, la partie polynomiale vaut 1 et K se décompose sous la forme $K=1+\frac{a}{X}+\frac{b}{(X-1)^4}+\frac{c}{(X-1)^3}+\frac{d}{(X-1)^2}+\frac{e}{X-1}$. Le coefficient a s'obtient facilement en multipliant K par X puis en remplaçant X par 0 : $a=1$.
Soit $K_1=K-1-\frac{1}{X}=\frac{4X^3-2X^2-2X+3}{(X-1)^4}$. Le changement d'indéterminée $X=Y+1$ donne $K_1=\frac{4(Y+1)^3-2(Y+1)^2-2(Y+1)+3}{Y^4}$. En développant, on obtient directement
$$K_1=\frac{4Y^3+10Y^2+6Y+3}{Y^4}=\frac{3}{Y^4}+\frac{6}{Y^3}+\frac{10}{Y^2}+\frac{4}{Y}$$
et donc (avec $Y=X-1$) : $K_1=\frac{4X^3-2X^2-2X+3}{(X-1)^4}=\frac{3}{(X-1)^4}+\frac{6}{(X-1)^3}+\frac{10}{(X-1)^2}+\frac{4}{X-1}$. Finalement,
$$K=\frac{X^5+X^4+1}{X(X-1)^4}=1+\frac{1}{X}+\frac{3}{(X-1)^4}+\frac{6}{(X-1)^3}+\frac{10}{(X-1)^2}+\frac{4}{X-1}$$

Correction de l'exercice 7 ▲

1.
$$\begin{aligned} \frac{(3-2i)X-5+3i}{X^2+iX+2} &= \frac{2+i}{X-i}+\frac{1-3i}{X+2i} \\ \frac{X+i}{X^2+i} &= \frac{\frac{2-\sqrt{2}}{4}+\frac{\sqrt{2}}{4}i}{X-\frac{\sqrt{2}-\sqrt{2}i}{2}}+\frac{\frac{2+\sqrt{2}}{4}-\frac{\sqrt{2}}{4}i}{X+\frac{\sqrt{2}-\sqrt{2}i}{2}} \\ \frac{X}{(X+i)^2} &= \frac{1}{X+i}+\frac{-i}{(X+i)^2} \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}
\frac{X^5+X+1}{X^4-1} &= X+\frac{\frac{3}{4}}{X-1}+\frac{\frac{1}{4}}{X+1}-\frac{X+\frac{1}{2}}{X^2+1}\\
&= X+\frac{\frac{3}{4}}{X-1}+\frac{\frac{1}{4}}{X+1}+\frac{-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}i}{X-i}+\frac{-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}i}{X+i}\\
\frac{X^2-3}{(X^2+1)(X^2+4)} &= -\frac{\frac{4}{3}}{X^2+1}+\frac{\frac{7}{3}}{X^2+4}\\
&= \frac{\frac{2}{3}i}{X-i}+\frac{-\frac{2}{3}i}{X+i}+\frac{-\frac{7}{12}i}{X-2i}+\frac{\frac{7}{12}i}{X+2i}\\
\frac{X^2+1}{X^4+1} &= \frac{\frac{1}{2}}{X^2-\sqrt{2}X+1}+\frac{\frac{1}{2}}{X^2+\sqrt{2}X+1}\\
&= \frac{-\frac{\sqrt{2}}{4}i}{X-\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i}+\frac{\frac{\sqrt{2}}{4}i}{X-\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i}\\
&\quad +\frac{\frac{\sqrt{2}}{4}i}{X+\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i}+\frac{-\frac{\sqrt{2}}{4}i}{X+\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i}
\end{aligned}$$

Correction de l'exercice 8 ▲

La décomposition en élément simple s'écrit :

$$\frac{1}{X(X-1)(X-2)^2}=\frac{-\frac{1}{4}}{X}+\frac{1}{X-1}+\frac{\frac{1}{2}}{(X-2)^2}+\frac{-\frac{3}{4}}{X-2}.$$

En multipliant cette identité par le dénominateur $X(X-1)(X-2)^2$, il vient :

$$1=-\tfrac{1}{4}Q_0+Q_1+\left(\tfrac{1}{2}-\tfrac{3}{4}(X-2)\right)Q_2.$$

Ainsi $A_0=-\frac{1}{4}$, $A_1=1$ et $A_1=(2-\frac{3}{4}X)$ conviennent. On a obtenu une relation de Bézout entre Q_1, Q_2 et Q_3 qui prouve que ces trois polynômes sont premiers dans leur ensemble : $\mathrm{pgcd}(Q_1,Q_2,Q_3)=1$.

Correction de l'exercice 9 ▲

1. (a) Si on pose $x=\cos\theta$ alors l'égalité $T_n(x)=\cos\big(n\arccos(x)\big)$ devient $T_n(\cos\theta)=\cos(n\theta)$, car $\arccos(\cos\theta)=\theta$ pour $\theta\in[0,\pi]$.

   (b) $T_0(x)=1$, $T_1(x)=x$.

   (c) En écrivant $(n+2)\theta=(n+1)\theta+\theta$ et $n\theta=(n+1)\theta-\theta$ on obtient :

   $$\cos\big((n+2)\theta\big)=\cos\big((n+1)\theta\big)\cos\theta-\sin\big((n+1)\theta\big)\sin\theta$$
   $$\cos\big(n\theta\big)=\cos\big((n+1)\theta\big)\cos\theta+\sin\big((n+1)\theta\big)\sin\theta$$

   Lorsque l'on fait la somme de ces deux égalités on obtient :

   $$\cos\big((n+2)\theta\big)+\cos\big(n\theta\big)=\cos\big((n+1)\theta\big)\cos\theta$$

   Avec $x=\cos\theta$ cela donne :

   $$T_{n+2}(x)+T_n(x)=2xT_{n+1}(x)$$

   (d) T_0 et T_1 étant des polynômes alors, par récurrence, $T_n(x)$ est un polynôme. De plus, toujours par la formule de récurrence, il est facile de voir que le degré de T_n est n.

2. Puisque les racines de $P=\lambda(X-a_1)\cdots(X-a_n)$ sont deux à deux distinctes, la décomposition en éléments simples de $\frac{1}{P}$ est de la forme $\frac{c_1}{X-a_1}+\cdots+\frac{c_n}{X-a_n}$.

   Expliquons comment calculer le coefficient c_1. On multiplie la fraction $\frac{1}{P}$ par $(X-a_1)$ ce qui donne $\frac{X-a_1}{P}=c_1+c_2\frac{X-a_1}{X-a_2}+\cdots+c_n\frac{X-a_1}{X-a_n}$ et $\frac{X-a_1}{P}=\frac{1}{\lambda(X-a_2)\cdots(X-a_n)}$

   On évalue ces égalités en $X=a_1$ ce qui donne

   $$c_1=\frac{1}{\lambda(a_1-a_2)\cdots(a_1-a_n)}=\frac{1}{\lambda\prod_{j\neq1}(a_1-a_j)}$$

On obtiendrait de même le coefficient c_k en multipliant $\frac{1}{P}$ par $(X-a_k)$, puis en remplaçant X par a_k, ce qui donne : $c_k = \frac{1}{\lambda \prod_{j \neq k}(a_k - a_j)}$.
Or la dérivée de P est

$$\begin{aligned} P'(X) = \quad & \lambda(X-a_2)\cdots(X-a_n) + \lambda(X-a_1)(X-a_3)\cdots(X-a_n) \\ & + \cdots + \lambda(X-a_1)\cdots(X-a_{k-1})(X-a_{k+1})\cdots(X-a_n) \\ & + \cdots + \lambda(X-a_1)\cdots(X-a_{n-1}) \end{aligned}$$

et donc $P'(a_1) = \lambda \prod_{j \neq 1}(a_1 - a_j)$ et plus généralement $P'(a_k) = \lambda \prod_{j \neq k}(a_k - a_j)$. On a bien prouvé $c_k = \frac{1}{P'(a_k)}$ et ainsi la décomposition en éléments simple de $1/P$ est :

$$\frac{1}{P(X)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\frac{1}{P'(a_k)}}{X - a_k}$$

3. (a) Cherchons d'abord les racines de $T_n(x)$. Soit $x \in [-1,1]$:

$$\begin{aligned} T_n(x) = 0 \quad & \iff \quad \cos\big(n \arccos(x)\big) = 0 \\ & \iff \quad n \arccos(x) \equiv \frac{\pi}{2} \pmod{\pi} \\ & \iff \quad \exists k \in \mathbb{Z} \;\; \arccos(x) = \frac{\pi}{2n} + \frac{k\pi}{n} \end{aligned}$$

Comme par définition $\arccos(x) \in [0,\pi]$, les entiers k possibles sont $k = 0,\ldots,n-1$. Ainsi

$$\arccos x = \frac{\pi}{2n} + \frac{k\pi}{n} \quad \iff \quad x = \cos\left(\frac{\pi}{2n} + \frac{k\pi}{n}\right)$$

Posons donc $\omega_k = \cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{2n}\right)$ pour $k = 0,\ldots,n-1$. Les ω_k sont les racines de T_n. Finalement $T_n(x) = \lambda \prod_{k=0}^{n-1}(x - \omega_k)$.

(b) Ainsi $T_n(x) = \lambda \prod_{k=0}^{n-1}(x - \omega_k)$ et les ω_k sont deux à deux distincts. On sait par la question précédente que la décomposition en éléments simple de $1/T_n$ s'écrit

$$\frac{1}{T_n(X)} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1/T_n'(\omega_k)}{X - \omega_k}$$

Repartant de $T_n(x) = \cos\big(n \arccos(x)\big)$, on calcule $T_n'(x) = \frac{n}{\sqrt{1-x^2}} \sin\big(n \arccos(x)\big)$. En utilisant que

$$\sin\big(n \arccos(\omega_k)\big) = \sin\left(n\left(\frac{(2k+1)\pi}{2n}\right)\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right) = (-1)^k$$

et

$$\sqrt{1-\cos^2\theta} = \sqrt{\sin^2\theta} = \sin\theta \qquad \text{pour } \theta \in [0,\pi]$$

on trouve que $T_n'(\omega_k) = \frac{n(-1)^k}{\sin\left(\frac{(2k+1)\pi}{2n}\right)}$.

Ainsi

$$\frac{1}{T_n(X)} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\frac{(-1)^k}{n} \sin\left(\frac{(2k+1)\pi}{2n}\right)}{X - \cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{2n}\right)}$$
