

# **Polynômes**

Corrections de Léa Blanc-Centi.

# 1 Opérations sur les polynômes

#### **Exercice 1**

Trouver le polynôme P de degré inférieur ou égal à 3 tel que :

$$P(0) = 1$$
 et  $P(1) = 0$  et  $P(-1) = -2$  et  $P(2) = 4$ .

Correction ▼

Vidéo 📕

[000427]

# 2 Division, pgcd

### **Exercice 2**

1. Effectuer la division euclidienne de *A* par *B* :

(a) 
$$A = 3X^5 + 4X^2 + 1$$
,  $B = X^2 + 2X + 3$ 

(b) 
$$A = 3X^5 + 2X^4 - X^2 + 1$$
,  $B = X^3 + X + 2$ 

(c) 
$$A = X^4 - X^3 + X - 2$$
,  $B = X^2 - 2X + 4$ 

(d) 
$$A = X^5 - 7X^4 - X^2 - 9X + 9$$
,  $B = X^2 - 5X + 4$ 

2. Effectuer la division selon les puissances croissantes de A par B à l'ordre k (c'est-à-dire tel que le reste soit divisible par  $X^{k+1}$ ):

(a) 
$$A = 1 - 2X + X^3 + X^4$$
,  $B = 1 + 2X + X^2$ ,  $k = 2$ 

(b) 
$$A = 1 + X^3 - 2X^4 + X^6$$
,  $B = 1 + X^2 + X^3$ ,  $k = 4$ 

Correction ▼

Vidéo 📕

[006955]

### Exercice 3

À quelle condition sur  $a,b,c \in \mathbb{R}$  le polynôme  $X^4 + aX^2 + bX + c$  est-il divisible par  $X^2 + X + 1$ ?

[006956]

Correction ▼

Vidéo 📕

### **Exercice 4**

1. Déterminer les pgcd des polynômes suivants:

(a) 
$$X^3 - X^2 - X - 2$$
 et  $X^5 - 2X^4 + X^2 - X - 2$ 

(b) 
$$X^4 + X^3 - 2X + 1$$
 et  $X^3 + X + 1$ 

(c) 
$$X^5 + 3X^4 + X^3 + X^2 + 3X + 1$$
 et  $X^4 + 2X^3 + X + 2$ 

(d) 
$$nX^{n+1} - (n+1)X^n + 1$$
 et  $X^n - nX + n - 1$   $(n \in \mathbb{N}^*)$ 

2. Calculer le pgcd D des polynômes A et B ci-dessous. Trouver des polynômes U et V tels que AU + BV = D.

(a) 
$$A = X^5 + 3X^4 + 2X^3 - X^2 - 3X - 2$$
  
et  $B = X^4 + 2X^3 + 2X^2 + 7X + 6$ 

(b) 
$$A = X^6 - 2X^5 + 2X^4 - 3X^3 + 3X^2 - 2X$$
  
et  $B = X^4 - 2X^3 + X^2 - X + 1$ 

Indication ▼

Correction ▼

[006957]

### Exercice 5

- 1. Montrer que si A et B sont deux polynômes à coefficients dans  $\mathbb{Q}$ , alors le quotient et le reste de la division euclidienne de A par B, ainsi que pgcd(A, B), sont aussi à coefficients dans  $\mathbb{Q}$ .
- 2. Soit  $a, b, c \in \mathbb{C}^*$  distincts, et  $0 des entiers. Montrer que si <math>P(X) = (X a)^p (X b)^q (X c)^r$ est à coefficients dans  $\mathbb{Q}$ , alors  $a, b, c \in \mathbb{Q}$ .

Indication ▼

Correction ▼

Vidéo

[006958]

#### **Racines et factorisation** 3

### **Exercice 6**

1. Factoriser dans  $\mathbb{R}[X]$  et  $\mathbb{C}[X]$  les polynômes suivants :

a) 
$$X^3 - 3$$

b) 
$$X^{12} - 1$$

c) 
$$X^6 + 1$$

a) 
$$X^3 - 3$$
 b)  $X^{12} - 1$  c)  $X^6 + 1$  d)  $X^9 + X^6 + X^3 + 1$ 

2. Factoriser les polynômes suivants :

a) 
$$X^2 + (3i-1)X - 2 - i$$

a) 
$$X^2 + (3i-1)X - 2 - i$$
 b)  $X^3 + (4+i)X^2 + (5-2i)X + 2 - 3i$ 

Correction ▼

Vidéo

[006959]

### Exercice 7

Pour quelles valeurs de a le polynôme  $(X+1)^7 - X^7 - a$  admet-il une racine multiple réelle?

Correction ▼

Vidéo 📕

[000410]

# **Exercice 8**

Chercher tous les polynômes P tels que P+1 soit divisible par  $(X-1)^4$  et P-1 par  $(X+1)^4$ .

Indications. Commencer par trouver une solution particulière  $P_0$  avec l'une des méthode suivantes :

- 1. à partir de la relation de Bézout entre  $(X-1)^4$  et  $(X+1)^4$ ;
- 2. en considérant le polynôme dérivé  $P'_0$  et en cherchant un polynôme de degré minimal.

Montrer que P convient si et seulement si le polynôme  $P - P_0$  est divisible par  $(X - 1)^4(X + 1)^4$ , et en déduire toutes les solutions du problème.

Correction ▼

Vidéo

[000370]

### **Exercice 9**

Quels sont les polynômes  $P \in \mathbb{C}[X]$  tels que P' divise P?

Indication ▼

Correction ▼

Vidéo 📕

[000378]

### **Exercice 10**

Trouver tous les polynômes P qui vérifient la relation

$$P(X^2) = P(X)P(X+1)$$

Indication ▼

Correction  $\blacktriangledown$ 

Vidéo 📕

[006960]

#### **Exercice 11**

Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Montrer qu'il existe un unique  $P \in \mathbb{C}[X]$  tel que

$$\forall z \in \mathbb{C}^*$$
  $P\left(z + \frac{1}{z}\right) = z^n + \frac{1}{z^n}$ 

Montrer alors que toutes les racines de P sont réelles, simples, et appartiennent à l'intervalle [-2,2].

Indication ▼

Correction ▼

Vidéo 📕

[006961]

### **Exercice 12**

- 1. Soit  $P = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \dots + a_1X + a_0$  un polynôme de degré  $n \ge 1$  à coefficients dans  $\mathbb{Z}$ . Démontrer que si P admet une racine dans  $\mathbb{Z}$ , alors celle-ci divise  $a_0$ .
- 2. Les polynômes  $X^3 X^2 109X 11$  et  $X^{10} + X^5 + 1$  ont-ils des racines dans  $\mathbb{Z}$ ?

Correction ▼

Vidéo 📕

[006962]

#### Exercice 13

Soient  $a_0, \ldots, a_n$  des réels deux à deux distincts. Pour tout  $i = 0, \ldots, n$ , on pose

$$L_i(X) = \prod_{\substack{1 \leqslant j \leqslant n \\ j \neq i}} \frac{X - a_j}{a_i - a_j}$$

(les  $L_i$  sont appelés polynômes interpolateurs de Lagrange). Calculer  $L_i(a_i)$ .

Soient  $b_0, \ldots, b_n$  des réels fixés. Montrer que  $P(X) = \sum_{i=0}^n b_i L_i(X)$  est l'unique polynôme de degré inférieur ou égal à n qui vérifie:

$$P(a_i) = b_i$$
 pour tout  $i = 0, ..., n$ .

Application. Trouver le polynôme P de degré inférieur ou égal à 3 tel que

$$P(0) = 1$$
 et  $P(1) = 0$  et  $P(-1) = -2$  et  $P(2) = 4$ .

Correction ▼

Vidéo 📕

[006963]

### **Indication pour l'exercice 4 ▲**

Le calcul du pgcd se fait par l'algorithme d'Euclide, et la "remontée" de l'algorithme permet d'obtenir *U* et *V*.

### **Indication pour l'exercice 5** ▲

Calculer pgcd(P, P').

### **Indication pour l'exercice 9** ▲

Si P = P'Q avec  $P \neq 0$ , regarder le degré de Q.

### **Indication pour l'exercice 10 ▲**

Montrer que si *P* est un polynôme non constant vérifiant la relation, alors ses seules racines possibles sont 0 et 1.

## **Indication pour l'exercice 11 ▲**

Pour l'existence, preuve par récurrence sur n. Pour les racines, montrer que  $P(x) = 2\cos(n\arccos(x/2))$ .

### Correction de l'exercice 1 A

On cherche *P* sous la forme  $P(X) = aX^3 + bX^2 + cX + d$ , ce qui donne le système linéaire suivant à résoudre:

$$\begin{cases} a + b + c + d = 0 \\ -a + b - c + d = -2 \\ 8a + 4b + 2c + d = 4 \end{cases}$$

Après calculs, on trouve une unique solution :  $a = \frac{3}{2}$ , b = -2,  $c = -\frac{1}{2}$ , d = 1 c'est-à-dire

$$P(X) = \frac{3}{2}X^3 - 2X^2 - \frac{1}{2}X + 1.$$

### Correction de l'exercice 2

1. (a) 
$$3X^5 + 4X^2 + 1 = (X^2 + 2X + 3)(3X^3 - 6X^2 + 3X + 16) - 41X - 47$$

(b) 
$$3X^5 + 2X^4 - X^2 + 1 = (X^3 + X + 2)(3X^2 + 2X - 3) - 9X^2 - X + 7$$

(c) 
$$X^4 - X^3 + X - 2 = (X^2 - 2X + 4)(X^2 + X - 2) - 7X + 6$$

(d) 
$$X^5 - 7X^4 - X^2 - 9X + 9$$
  
=  $(X^2 - 5X + 4)(X^3 - 2X^2 - 14X - 63) - 268X + 261$ 

2. (a) 
$$1-2X+X^3+X^4=(1+2X+X^2)(1-4X+7X^2)+X^3(-9-6X)$$

(b) 
$$1+X^3-2X^4+X^6=(1+X^2+X^3)(1-X^2-X^4)+X^5(1+2X+X^2)$$

### Correction de l'exercice 3 A

La division euclidienne de  $A = X^4 + aX^2 + bX + c$  par  $B = X^2 + X + 1$  donne

$$X^4 + aX^2 + bX + c = (X^2 + X + 1)(X^2 - X + a) + (b - a + 1)X + c - a$$

Or A est divisible par B si et seulement si le reste R = (b-a+1)X + c - a est le polynôme nul, c'est-à-dire si et seulement si b-a+1=0 et c-a=0.

### Correction de l'exercice 4

1. L'algorithme d'Euclide permet de calculer le pgcd par une suite de divisions euclidiennes.

(a) 
$$X^5 - 2X^4 + X^2 - X - 2 = (X^3 - X^2 - X - 2)(X^2 - X) + 2X^2 - 3X - 2$$
  
puis  $X^3 - X^2 - X - 2 = (2X^2 - 3X - 2)(\frac{1}{2}X + \frac{1}{4}) + \frac{3}{4}X - \frac{3}{2}$   
puis  $2X^2 - 3X - 2 = (\frac{3}{4}X - \frac{3}{2})(\frac{8}{3}X + \frac{4}{3})$ 

Le pgcd est le dernier reste non nul, divisé par son coefficient dominant:

$$pgcd(X^3 - X^2 - X - 2, X^5 - 2X^4 + X^2 - X - 2) = X - 2$$

(b) 
$$X^4 + X^3 - 2X + 1 = (X^3 + X + 1)(X + 1) - X^2 - 4X$$
  
puis  $X^3 + X + 1 = (-X^2 - 4X)(-X + 4) + 17X + 1$ 

donc pgcd 
$$(X^4 + X^3 - 2X + 1, X^3 + X + 1)$$
  
= pgcd $(-X^2 - 4X, 17X + 1) = 1$ 

car  $-X^2 - 4X$  et 17X + 1 n'ont pas de racine (même complexe) commune.

5

(c) 
$$X^5 + 3X^4 + X^3 + X^2 + 3X + 1 = (X^4 + 2X^3 + X + 2)(X + 1) - X^3 - 1$$
  
puis  $X^4 + 2X^3 + X + 2 = (-X^3 - 1)(-X - 2) + 2X^3 + 2$ 

$$pgcd(X^5 + 3X^4 + X^3 + X^2 + 3X + 1, X^4 + 2X^3 + X + 2) = X^3 + 1$$

(d) 
$$nX^{n+1} - (n+1)X^n + 1$$
  
  $= (X^n - nX + n - 1)(nX - (n+1)) + n^2(X - 1)^2$   
 Si  $n = 1$  alors  $X^n - nX + n - 1 = 0$  et le pgcd vaut  $(X - 1)^2$ . On constate que 1 est racine de  $X^n - nX + n - 1$ , et on trouve  $X^n - nX + n - 1 = (X - 1)(X^{n-1} + X^{n-2} + \dots + X^2 + X - (n-1))$ .  
 Si  $n \ge 2$ : 1 est racine de  $X^{n-1} + X^{n-2} + \dots + X^2 + X - (n-1)$  et on trouve  $X^{n-1} + X^{n-2} + \dots + X^2 + X - (n-1)$ 

 $=(X-1)(X^{n-2}+2X^{n-3}+\cdots+(n-1)X^2+nX+(n+1))$ , donc finalement  $(X-1)^2$  divise  $X^n-nX+n-1$  (on pourrait aussi remarquer que 1 est racine de multiplicité au moins deux de  $X^n-nX+n-1$ , puisqu'il est racine de ce polynôme et de sa dérivée). Ainsi

si 
$$n \ge 2$$
,  $\operatorname{pgcd}(nX^{n+1} - (n+1)X^n + 1, X^n - nX + n - 1) = (X-1)^2$ 

2. (a) 
$$A = X^5 + 3X^4 + 2X^3 - X^2 - 3X - 2$$
 et  $B = X^4 + 2X^3 + 2X^2 + 7X + 6$  donc  $A = BQ_1 + R_1$  avec  $Q_1 = X + 1$ ,  $R_1 = -2X^3 - 10X^2 - 16X - 8$  puis  $B = R_1Q_2 + R_2$  avec  $Q_2 = -\frac{1}{2}X + \frac{3}{2}$  et  $R_2 = 9X^2 + 27X + 18$  et enfin  $R_1 = R_2Q_3$  avec  $Q_3 = -\frac{2}{9}X - \frac{4}{9}$  Donc  $D = X^2 + 3X + 2$ , et on obtient

$$9D = B - R_1Q_2 = B - (A - BQ_1)Q_2 = -AQ_2 + B(1 + Q_1Q_2)$$

soit

$$\begin{cases} U = \frac{1}{9}(-Q_2) = \frac{1}{18}X - \frac{1}{6} \\ V = \frac{1}{9}(1 + Q_1Q_2) = -\frac{1}{18}X^2 + \frac{1}{9}X + \frac{5}{18} \end{cases}$$

(b) On a  $A = BQ_1 + R_1$  avec  $Q_1 = X^2 + 1$ ,  $R_1 = X^2 - X - 1$  puis  $B = R_1Q_2 + R_2$  avec  $Q_2 = X^2 - X + 1$  et  $R_2 = -X + 2$  et enfin  $R_1 = R_2Q_3 + R_3$  avec  $Q_3 = -X - 1$  et  $R_3 = 1$  Donc D = 1, et on obtient

$$1 = R_1 - R_2 Q_3 = R_1 - (B - R_1 Q_2) Q_3 = R_1 (1 + Q_2 Q_3) - B Q_3$$
  
=  $(A - B Q_1) (1 + Q_2 Q_3) - B Q_3$   
=  $A(1 + Q_2 Q_3) - B(Q_1 (1 + Q_2 Q_3) + Q_3)$ 

soit

$$\begin{cases} U = 1 + Q_2 Q_3 = -X^3 \\ V = -Q_1 (1 + Q_2 Q_3) - Q_3 = 1 + X + X^3 + X^5 \end{cases}$$

### Correction de l'exercice 5

1. Lorsqu'on effectue la division euclidienne A = BQ + R, les coefficients de Q sont obtenus par des opérations élémentaires (multiplication, division, addition) à partir des coefficients de A et B: ils restent donc dans  $\mathbb{Q}$ . De plus, R = A - BQ est alors encore à coefficients rationnels.

Alors pgcd(A, B) = pgcd(B, R) et pour l'obtenir, on fait la division euclidienne de B par R (dont le quotient et le reste sont encore à coefficients dans  $\mathbb{Q}$ ), puis on recommence... Le pgcd est le dernier reste non nul, c'est donc encore un polynôme à coefficients rationnels.

- 2. Notons  $P_1 = \operatorname{pgcd}(P, P')$ : comme P est à coefficients rationnels, P' aussi et donc  $P_1$  aussi. Or  $P_1(X) = (X-a)^{p-1}(X-b)^{q-1}(X-c)^{r-1}$ . En itérant le processus, on obtient que  $P_{r-1}(X) = (X-c)$  est à coefficients rationnels, donc  $c \in \mathbb{Q}$ .
  - On remonte alors les étapes:  $P_{q-1}(X) = (X-b)(X-c)^{r-q+1}$  est à coefficients rationnels, et X-b aussi en tant que quotient de  $P_{q-1}$  par le polynôme à coefficients rationnels  $(X-c)^{r-q+1}$ , donc  $b \in \mathbb{Q}$ . De même, en considérant  $P_{p-1}$ , on obtient  $a \in \mathbb{Q}$ .

#### Correction de l'exercice 6 A

1. (a)  $X^3 - 3 = (X - 3^{1/3})(X^2 + 3^{1/3}X + 3^{2/3})$  où  $X^2 + 3^{1/3}X + 3^{2/3}$  est irréductible sur  $\mathbb{R}$ . On cherche ses racines complexes pour obtenir la factorisation sur  $\mathbb{C}$ :

$$X^{3} - 3 = (X - 3^{1/3})(X + \frac{1}{2}3^{1/3} - \frac{i}{2}3^{5/6})(X + \frac{1}{2}3^{1/3} + \frac{i}{2}3^{5/6})$$

(b) Passons à  $X^{12}-1$ .  $z=re^{i\theta}$  vérifie  $z^{12}=1$  si et seulement si r=1 et  $12\theta\equiv 0[2\pi]$ , on obtient donc comme racines complexes les  $e^{ik\pi/6}$  ( $k=0,\ldots,11$ ), parmi lesquelles il y en a deux réelles (-1 et 1) et cinq couples de racines complexes conjuguées ( $e^{i\pi/6}$  et  $e^{11i\pi/6}$ ,  $e^{2i\pi/6}$  et  $e^{10i\pi/6}$ ,  $e^{3i\pi/6}$  et  $e^{9i\pi/6}$ ,  $e^{4i\pi/6}$  et  $e^{8i\pi/6}$ ,  $e^{5i\pi/6}$  et  $e^{7i\pi/6}$ ), d'où la factorisation sur  $\mathbb{C}[X]$ :

$$\begin{array}{ll} X^{12}-1 = & (X-1)(X+1)(X-e^{i\pi/6})(X-e^{11i\pi/6})(X-e^{2i\pi/6}) \\ & (X-e^{10i\pi/6})(X-e^{3i\pi/6})(X-e^{9i\pi/6})(X-e^{4i\pi/6}) \\ & (X-e^{8i\pi/6})(X-e^{5i\pi/6})(X-e^{7i\pi/6}) \end{array}$$

Comme  $(X - e^{i\theta})(X - e^{-i\theta}) = (X^2 - 2\cos(\theta)X + 1)$ , on en déduit la factorisation dans  $\mathbb{R}[X]$ :

$$\begin{array}{ll} X^{12}-1 &= (X-1)(X+1)(X^2-2\cos(\pi/6)X+1) \\ &\quad (X^2-2\cos(2\pi/6)X+1)(X^2-2\cos(3\pi/6)X+1) \\ &\quad (X^2-2\cos(4\pi/6)X+1)(X^2-2\cos(5\pi/6)X+1) \\ &\quad = (X-1)(X+1)(X^2-\sqrt{3}X+1) \\ &\quad (X^2-X+1)(X^2+1)(X^2+X+1)(X^2+\sqrt{3}X+1) \end{array}$$

(c) Pour  $X^6+1$ ,  $z=re^{i\theta}$  vérifie  $z^6=-1$  si et seulement si r=1 et  $6\theta\equiv\pi[2\pi]$ , on obtient donc comme racines complexes les  $e^{i(\pi+2k\pi)/6}$  ( $k=0,\ldots,5$ ). D'où la factorisation dans  $\mathbb{C}[X]$ :

$$\begin{array}{ll} X^6+1 &= (X-e^{i\pi/6})(X-e^{3i\pi/6})(X-e^{5i\pi/6})(X-e^{7i\pi/6}) \\ & (X-e^{9i\pi/6})(X-e^{11i\pi/6}) \end{array}$$

Pour obtenir la factorisation dans  $\mathbb{R}[X]$ , on regroupe les paires de racines complexes conjuguées :

$$X^6 + 1 = (X^2 + 1)(X^2 - \sqrt{3}X + 1)(X^2 + \sqrt{3}X + 1)$$

(d)  $X^9 + X^6 + X^3 + 1 = P(X^3)$  où  $P(X) = X^3 + X^2 + X + 1 = \frac{X^4 - 1}{X - 1}$ : les racines de P sont donc les trois racines quatrièmes de l'unité différentes de  $P(X) = X^3 + X^2 + X + 1 = \frac{X^4 - 1}{X - 1}$ : les racines de  $P(X) = X^3 + X^2 + X + 1 = \frac{X^4 - 1}{X - 1}$  et

$$X^9 + X^6 + X^3 + 1 = P(X^3)$$
  
=  $(X^3 + 1)(X^3 - i)(X^3 + i)$   
=  $(X^3 + 1)(X^6 + 1)$ 

On sait déjà factoriser  $X^6 + 1$ , il reste donc à factoriser le polynôme  $X^3 + 1 = (X+1)(X^2 - X + 1)$ , où  $X^2 - X + 1$  n'a pas de racine réelle. Donc

$$X^9 + X^6 + X^3 + 1 = (X+1)(X^2 - X + 1)(X^2 + 1)$$
  
 $(X^2 - \sqrt{3}X + 1)(X^2 + \sqrt{3}X + 1)$ 

Pour la factorisation sur  $\mathbb{C}$ : les racines de  $X^2 - X + 1$  sont  $e^{i\pi/3}$  et  $e^{5i\pi/3}$ , ce qui donne

$$\begin{array}{ll} X^9 + X^6 + X^3 + 1 &= (X+1)(X - e^{i\pi/3})(X - e^{5i\pi/3}) \\ & (X - e^{i\pi/6})(X - e^{3i\pi/6})(X - e^{5i\pi/6}) \\ & (X - e^{7i\pi/6})(X - e^{9i\pi/6})(X - e^{11i\pi/6}) \end{array}$$

2. (a) Pour  $X^2 + (3i-1)X - 2 - i$ , on calcule le discriminant

$$\Delta = (3i-1)^2 - 4(-2-i) = -2i$$

et on cherche les racines carrées (complexes!) de  $\Delta$ : w = a + ib vérifie  $w^2 = \Delta$  si et seulement si w = 1 - i ou w = -1 + i. Les racines du polynômes sont donc  $\frac{1}{2}(-(3i-1)\pm(1-i))$  et P(X) = (X+i)(X-1+2i).

(b) Pour  $X^3 + (4+i)X^2 + (5-2i)X + 2 - 3i$ : -1 est racine évidente, et  $P(X) = (X+1)(X^2 + (3+i)X + 2 - 3i)$ . Le discriminant du polynôme  $X^2 + (3+i)X + 2 - 3i$  vaut  $\Delta = 18i$ , ses deux racines carrées complexes sont  $\pm (3+3i)$  et finalement on obtient P(X) = (X+1)(X-i)(X+3+2i).

### Correction de l'exercice 7

Soit  $x \in \mathbb{R}$ ; x est une racine multiple de P si et seulement si P(x) = 0 et P'(x) = 0:

$$P(x) = P'(x)0 \iff \begin{cases} (x+1)^7 - x^7 - a = 0 \\ 7(x+1)^6 - 7x^6 = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} (x+1)x^6 - x^7 - a = 0 \\ (x+1)x^6 - x^7 - a = 0 \end{cases}$$
 en utilisant la deuxième équation 
$$(x+1)^6 = x^6$$

$$\iff \begin{cases} x^6 = a \\ (x+1)^3 = \pm x^3 \end{cases}$$
 en prenant la racine carrée 
$$\iff \begin{cases} x^6 = a \\ x+1 = \pm x \end{cases}$$
 en prenant la racine cubique

qui admet une solution  $(x = -\frac{1}{2})$  si et seulement si  $a = \frac{1}{64}$ .

#### Correction de l'exercice 8 A

1. On remarque que si P est solution, alors  $P+1=(X-1)^4A$  et par ailleurs  $P-1=(X+1)^4B$ , ce qui donne  $1=\frac{A}{2}(X-1)^4+\frac{-B}{2}(X+1)^4$ . Cherchons des polynômes A et B qui conviennent: pour cela, on écrit la relation de Bézout entre  $(X-1)^4$  et  $(X+1)^4$  qui sont premiers entre eux, et on obtient

$$\frac{A}{2} = \frac{5}{32}X^3 + \frac{5}{8}X^2 + \frac{29}{32}X + \frac{1}{2}$$
$$\frac{-B}{2} = -\frac{5}{32}X^3 + \frac{5}{8}X^2 - \frac{29}{32}X + \frac{1}{2}$$

On a alors par construction

$$(X-1)^4 A - 1 = 2\left(1 + (X+1)^4 \frac{-B}{2}\right) = 1 + (X+1)^4 B$$

et  $P_0 = (X-1)^4 A - 1$  convient. En remplaçant, on obtient après calculs :

$$P_0 = \frac{5}{16}X^7 - \frac{21}{16}X^5 + \frac{35}{16}X^3 - \frac{35}{16}X$$

2. Si  $(X-1)^4$  divise P+1, alors 1 est racine de multiplicité au moins 4 de P+1, et donc racine de multiplicité au moins 3 de P': alors  $(X-1)^3$  divise P'. De même  $(X+1)^3$  divise P'. Comme  $(X-1)^3$  et  $(X+1)^3$  sont premiers entre eux, nécessairement  $(X-1)^3(X+1)^3$  divise P'. Cherchons un polynôme de degré minimal: on remarque que les primitives de

$$\lambda (X-1)^3 (X+1)^3 = \lambda (X^2-1)^3 = \lambda (X^6-3X^4+3X^2-1)$$

8

sont de la forme  $P(X)=\lambda(\frac{1}{7}X^7-\frac{3}{5}X^5+X^3-X+a)$ . Si P convient, nécessairement 1 est racine de P+1 et -1 est racine de P-1, ce qui donne  $\lambda(\frac{-16}{35}+a)=-1$  et  $\lambda(\frac{16}{35}+a)=1$ . D'où  $\lambda a=0$  et comme on cherche P non nul, il faut a=0 et  $\lambda=\frac{35}{16}$ . On vérifie que

$$P_0(X) = \frac{35}{16}(\frac{1}{7}X^7 - \frac{3}{5}X^5 + X^3 - X) = \frac{5}{16}X^7 - \frac{21}{16}X^5 + \frac{35}{16}X^3 - \frac{35}{16}X$$

est bien solution du problème: le polynôme  $A = P_0 + 1$  admet 1 comme racine, i.e. A(1) = 0, et sa dérivée admet 1 comme racine triple donc A'(1) = A''(1) = A'''(1) = 0, ainsi 1 est racine de multiplicité au moins 4 de A et donc  $(X - 1)^4$  divise A = P + 1. De même,  $(X + 1)^4$  divise P - 1.

Supposons que P soit une solution du problème. On note toujours  $P_0$  la solution particulière obtenue ci-dessus. Alors P+1 et  $P_0+1$  sont divisibles par  $(X-1)^4$ , et P-1 et  $P_0-1$  sont divisibles par  $(X+1)^4$ . Ainsi  $P-P_0=(P+1)-(P_0+1)=(P-1)-(P_0-1)$  est divisible par  $(X-1)^4$  et par  $(X+1)^4$ . Comme  $(X-1)^4$  et  $(X+1)^4$  sont premiers entre eux, nécessairement  $P-P_0$  est divisible par  $(X-1)^4(X+1)^4$ . Réciproquement, si  $P=P_0+(X-1)^4(X+1)^4A$ , alors P+1 est bien divisible par  $(X-1)^4$  et P-1 est divisible par  $(X+1)^4$ . Ainsi les solutions sont exactement les polynômes de la forme

$$P_0(X) + (X-1)^4(X+1)^4A(X)$$

où  $P_0$  est la solution particulière trouvée précédemment, et A un polynôme quelconque.

### Correction de l'exercice 9 A

Le polynôme nul convient. Dans la suite on suppose que P n'est pas le polynôme nul.

Notons  $n = \deg P$  son degré. Comme P' divise P, alors P est non constant, donc  $n \ge 1$ . Soit  $Q \in \mathbb{C}[X]$  tel que P = P'Q. Puisque  $\deg(P') = \deg(P) - 1 \ge 0$ , alors Q est de degré 1. Ainsi Q(X) = aX + b avec  $a \ne 0$ , et donc

$$P(X) = P'(X)(aX + b) = aP'(X)(X + \frac{b}{a})$$

Donc si  $z \neq \frac{-b}{a}$  et si z est racine de P de multiplicité  $k \geqslant 1$ , alors z est aussi racine de P' avec la même multiplicité, ce qui est impossible. Ainsi la seule racine possible de P est  $\frac{-b}{a}$ .

Réciproquement, soit P un polynôme avec une seule racine  $z_0 \in \mathbb{C}$ : il existe  $\lambda \neq 0$ ,  $n \geqslant 1$  tels que  $P = \lambda (X - z_0)^n$ , qui est bien divisible par son polynôme dérivé.

### Correction de l'exercice 10 ▲

Si P est constant égal à c, il convient si et seulement si  $c = c^2$ , et alors  $c \in \{0, 1\}$ .

Dans la suite on suppose P non constant. Notons Z l'ensemble des racines de P. On sait que Z est un ensemble non vide, fini.

Analyse

Si  $z \in Z$ , alors P(z) = 0 et la relation  $P(X^2) = P(X)P(X+1)$  implique  $P(z^2) = 0$ , donc  $z^2 \in Z$ . En itérant, on obtient  $z^{2k} \in Z$  (pour tout  $k \in \mathbb{N}^*$ ). Si |z| > 1, la suite  $(|z^{2k}|)_k$  est strictement croissante donc Z contient une infinité d'éléments, ce qui est impossible. De même si 0 < |z| < 1, la suite  $(|z^{2k}|)_k$  est strictement décroissante, ce qui est impossible pour la même raison. Donc les éléments de Z sont soit 0, soit des nombres complexes de module 1.

De plus, si P(z)=0, alors toujours par la relation  $P(X^2)=P(X)P(X+1)$ , on a que  $P((z-1)^2)=0$  donc  $(z-1)^2\in Z$ . Par le même raisonnement que précédemment, alors ou bien z-1=0 ou bien |z-1|=1. En écrivant z=a+ib, on vérifie que |z|=|z-1|=1 équivaut à  $z=e^{\pm i\pi/3}$ . Finalement,  $Z\subset \left\{0,1,e^{i\pi/3},e^{-i\pi/3}\right\}$ . Or si  $e^{\pm i\pi/3}$  était racine de P, alors  $(e^{\pm i\pi/3})^2$  devrait aussi être dans Z, mais ce n'est aucun des quatre nombres complexes listés ci-dessus. Donc ni  $e^{i\pi/3}$ , ni  $e^{-i\pi/3}$  ne sont dans Z. Les deux seules racines (complexes) possibles sont donc 0 et 1. Conclusion : le polynôme P est nécessairement de la forme  $\lambda X^k(X-1)^\ell$ .

Synthèse

La condition  $P(X^2) = P(X)P(X+1)$  devient

$$\lambda X^{2k}(X^2-1)^\ell = \lambda^2 X^k(X-1)^\ell (X+1)^k X^\ell$$

qui équivaut à 
$$\left\{ \begin{array}{l} \lambda^2 = \lambda \\ 2k = k + \ell \\ k = \ell \end{array} \right. .$$

Autrement dit  $k = \ell$  et  $\lambda = 1$  (puisqu'on a supposé *P* non constant).

Conclusion Finalement, les solutions sont le polynôme nul et les polynômes  $(X^2-X)^k$ ,  $k \in \mathbb{N}$  (k=0 donne le polynôme 1).

#### Correction de l'exercice 11 A

- 1. Commençons par remarquer que si P et Q sont deux polynômes qui conviennent, alors pour tout  $z \in \mathbb{C}^*$ ,  $P\left(z+\frac{1}{z}\right)-Q\left(z+\frac{1}{z}\right)=0$ . En appliquant cette égalité à  $z=e^{i\theta}$ , on obtient  $(P-Q)(2\cos\theta)=0$ . Le polynôme P-Q a une infinité de racines, donc il est nul, ce qui montre P=Q.
- 2. Montrons l'existence de *P* par récurrence forte sur *n*:
  - Pour n = 0, P = 2 convient et pour n = 1, P = X convient.
  - Passage des rangs  $k \le n$  au rang n+1. Si on note  $P_k$  le polynôme construit pour  $k \le n$ , on a

$$z^{n+1} + \frac{1}{z^{n+1}} = (z + \frac{1}{z})(z^n + \frac{1}{z^n}) - (z^{n-1} + \frac{1}{z^{n-1}}) = (z + \frac{1}{z})P_n(z + \frac{1}{z}) - P_{n-1}(z + \frac{1}{z})$$

donc  $P_{n+1}(X) = XP_n(X) - P_{n-1}(X)$  convient.

- On a ainsi construit  $P_n$  pour tout n (avec  $\deg P_n = n$ ).
- 3. Fixons n et notons P le polynôme obtenu. Pour tout  $\theta \in \mathbb{R}$ ,  $P(e^{i\theta} + e^{-i\theta}) = e^{in\theta} + e^{-in\theta}$  donc  $P(2\cos(\theta)) = 2\cos(n\theta)$ .

En posant  $x = 2\cos(\theta)$  et donc  $\theta = \arccos(\frac{x}{2})$  on obtient la relation Ainsi,

$$P(x) = 2\cos(n\arccos(\frac{x}{2}))$$
  $\forall x \in [-2, 2]$ 

Le polynôme dérivée est  $P'(x) = \frac{n}{\sqrt{1-(\frac{x}{2})^2}}\sin(n\arccos(\frac{x}{2}))$ , il s'annule en changeant de signe en chaque  $\alpha_k = 2\cos(\frac{k\pi}{n})$ , ainsi  $P'(\alpha_k) = 0$  pour  $k = 0, \dots, n$ .

On calcule aussi que  $P(\alpha_k) = \pm 2$ . Le tableau de signe montre que P est alternativement croissante (de -2 à +2) puis décroissante (de +2 à -2) sur chaque intervalle  $[\alpha_{k+1}, \alpha_k]$ , qui forment une partition de [-2,2]. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, P possède n racines simples (une dans chaque intervalle  $[\alpha_{k+1}, \alpha_k]$ ) dans [-2,2]. Puisque P est de degré n, on a ainsi obtenu toutes ses racines.

### Correction de l'exercice 12

- 1. Si  $k \in \mathbb{Z}$  est racine de P, alors  $k^n + a_{n-1}k^{n-1} + \cdots + a_1k = -a_0$  ce qui donne  $k(k^{n-1} + \cdots + a_1) = -a_0$ , donc k divise  $a_0$ .
- 2. Si  $X^3 X^2 109X 11$  a une racine  $k \in \mathbb{Z}$ , nécessairement k divise 11, donc k vaut -1, 1, -11 ou 11. En testant ces quatre valeurs, on trouve que seul 11 est racine.

De même, si  $X^{10} + X^5 + 1$  admettait une racine entière k, celle-ci diviserait 1 donc vaut  $k = \pm 1$ , or on vérifie que ni +1, ni -1 ne sont racines. Ainsi  $X^{10} + X^5 + 1$  n'a pas de racine entière.

## Correction de l'exercice 13 ▲

On a

$$L_i(a_i) = \prod_{\substack{1 \leqslant j \leqslant n \ j \neq i}} \frac{a_i - a_j}{a_i - a_j} = 1$$
 et  $L_i(a_j) = 0$  si  $j \neq i$ 

puisque le produit contient un facteur qui est nul:  $(a_j - a_j)$ . Puisque les  $L_i$  sont tous de degré n, le polynôme P est de degré inférieur ou égal à n, et  $P(a_j) = \sum_{i=0}^n b_i L_i(a_j) = b_i$ .

Il reste à montrer qu'un tel polynôme est unique. Supposons que Q convienne aussi, alors P-Q est de degré inférieur ou égal à n et s'annule en n+1 points (les  $a_i$ ), donc il est identiquement nul, i.e. P=Q.

Pour l'application on utilise utilise les polynômes interpolateurs de Lagrange avec  $a_0 = 0$ ,  $b_0 = 1$ ;  $a_1 = 1$ ,  $b_1 = 0$ ;  $a_2 = -1$ ,  $b_2 = -2$ ;  $a_3 = 2$ ,  $b_3 = 4$ . On sait qu'un tel polynôme P(X) est unique et s'écrit

$$P(X) = 1 \cdot L_0(X) + 0 \cdot L_1(X) - 2 \cdot L_2(X) + 4L_3(X)$$

où

$$L_0(X) = \frac{(X-1)(X+1)(X-2)}{(0-1)(0+1)(0-2)} = \frac{1}{2}(X^3 - 2X^2 - X + 2)$$

$$L_1(X) = \frac{(X-0)(X+1)(X-2)}{(1-0)(1+1)(1-2)} = \frac{-1}{2}(X^3 - X^2 - 2X)$$

$$L_2(X) = \frac{(X-0)(X-1)(X-2)}{(-1-0)(-1-1)(-1-2)} = \frac{-1}{6}(X^3 - 3X^2 + 2X)$$

$$L_3(X) = \frac{(X-0)(X-1)(X+1)}{(2-0)(2-1)(2+1)} = \frac{1}{6}(X^3 - X)$$

Ainsi:

$$P(X) = \frac{3}{2}X^3 - 2X^2 - \frac{1}{2}X + 1.$$