

Relation d'équivalence, relation d'ordre

1 Relation d'équivalence

Exercice 1

Dans \mathbb{C} on définit la relation \mathcal{R} par :

$$z\mathcal{R}z' \Leftrightarrow |z| = |z'|.$$

1. Montrer que \mathcal{R} est une relation d'équivalence.
2. Déterminer la classe d'équivalence de chaque $z \in \mathbb{C}$.

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#) [Vidéo ■](#)

[000209]

Exercice 2

Montrer que la relation \mathcal{R} définie sur \mathbb{R} par :

$$x\mathcal{R}y \iff xe^y = ye^x$$

est une relation d'équivalence. Préciser, pour x fixé dans \mathbb{R} , le nombre d'éléments de la classe de x modulo \mathcal{R} .

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#) [Vidéo ■](#)

[000212]

2 Relation d'ordre

Exercice 3

Soit (E, \leq) un ensemble ordonné. On définit sur $\mathcal{P}(E) \setminus \{\emptyset\}$ la relation \prec par

$$X \prec Y \quad \text{ssi} \quad (X = Y \text{ ou } \forall x \in X \forall y \in Y x \leq y).$$

Vérifier que \prec est une relation d'ordre.

[Correction ▼](#) [Vidéo ■](#)

[000217]

Indication pour l'exercice 1 ▲

Un dessin permettra d'avoir une bonne idée de ce qui se passe...

Indication pour l'exercice 2 ▲

1. Pour la transitivité on pourra calculer xye^z .
 2. Poser la fonction $t \mapsto \frac{t}{e^t}$, après une étude de fonction on calculera le nombre d'antécédents possibles.
-

Correction de l'exercice 1 ▲

1. Soient z, z', z'' des complexes quelconques.

- Reflexivité : $z\mathcal{R}z$ car $|z| = |z|$.
- Symétrie : $z\mathcal{R}z' \Rightarrow z'\mathcal{R}z$ car $|z| = |z'|$ et donc $|z'| = |z|$.
- Transitivité : $z\mathcal{R}z'$ et $z'\mathcal{R}z''$ alors $|z| = |z'| = |z''|$ donc $z\mathcal{R}z''$.

En fait, nous avons juste retranscrit que l'égalité "=" est une relation d'équivalence.

2. La classe d'équivalence d'un point $z \in \mathbb{C}$ est l'ensemble des complexes qui sont en relation avec z , *i.e.* l'ensemble des complexes dont le module est égal à $|z|$. Géométriquement la classe d'équivalence de z est le cercle \mathcal{C} de centre 0 et de rayon $|z|$:

$$\mathcal{C} = \left\{ |z|e^{i\theta} / \theta \in \mathbb{R} \right\}.$$

Correction de l'exercice 2 ▲

- 1.
- Reflexivité : Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $xe^x = xe^x$ donc $x\mathcal{R}x$.
 - Symétrie : Pour $x, y \in \mathbb{R}$, si $x\mathcal{R}y$ alors $xe^y = ye^x$ donc $ye^x = xe^y$ donc $y\mathcal{R}x$.
 - Transitivité : Soient $x, y, z \in \mathbb{R}$ tels que $x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R}z$, alors $xe^y = ye^x$ et $ye^z = ze^y$. Calculons xye^z :

$$xye^z = x(ye^z) = x(ze^y) = z(xe^y) = z(ye^x) = zye^x.$$

Donc $xye^z = zye^x$. Si $y \neq 0$ alors en divisant par y on vient de montrer que $xe^z = ze^x$ donc $x\mathcal{R}z$ et c'est fini. Pour le cas $y = 0$ alors $x = 0$ et $z = 0$ donc $x\mathcal{R}z$ également.

2. Soit $x \in \mathbb{R}$ fixé. On note $\mathcal{C}(x)$ la classe d'équivalence de x modulo \mathcal{R} :

$$\mathcal{C}(x) := \{y \in \mathbb{R} \mid y\mathcal{R}x\}.$$

Donc

$$\mathcal{C}(x) = \{y \in \mathbb{R} \mid xe^y = ye^x\}.$$

Soit la fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(t) = \frac{t}{e^t}.$$

Alors

$$\mathcal{C}(x) = \{y \in \mathbb{R} \mid f(x) = f(y)\}.$$

Autrement dit $\mathcal{C}(x)$ est l'ensemble des $y \in \mathbb{R}$ qui par f prennent la même valeur que $f(x)$; en raccourci :

$$\mathcal{C}(x) = f^{-1}(f(x)).$$

Étudions maintenant la fonction f afin de déterminer le nombre d'antécédents: par un calcul de f' on montre que f est strictement croissante sur $] -\infty, 1]$ puis strictement décroissante sur $[1, +\infty[$. De plus en $-\infty$ la limite de f est $-\infty$, $f(1) = \frac{1}{e}$, et la limite en $+\infty$ est 0.

C'est le moment de dessiner le graphe de f !!

- Pour $x \leq 0$ alors $f(x) \in] -\infty, 0]$ et alors $f(x)$ a un seul antécédent.
- Pour $x > 0$ avec $x \neq 1$ alors $f(x) \in]0, \frac{1}{e}[$ et alors $f(x)$ a deux antécédents.
- pour $x = 1$, alors $f(x) = 1/e$ n'a qu'un seul antécédent.

Bilan : si $x \in]0, 1[\cup]1, +\infty[$ alors $\text{Card } \mathcal{C}(x) = \text{Card } f^{-1}(f(x)) = 2$, si $x \leq 0$ ou $x = 1$ alors $\text{Card } \mathcal{C}(x) = \text{Card } f^{-1}(f(x)) = 1$.

Correction de l'exercice 3 ▲

- Reflexivité : pour tout $X \in \mathcal{P}(E)$ on a $X \prec X$ car $X = X$.
- Anti-symétrie : pour $X, Y \in \mathcal{P}(E)$ tels que $X \prec Y$ et $Y \prec X$, alors par définition de \prec on a

$$\forall x \in X \quad \forall y \in Y \quad x \leq y \text{ et } y \leq x.$$

Comme la relation \leq est une relation d'ordre alors $x \leq y$ et $y \leq x$ implique $x = y$. Donc

$$\forall x \in X \quad \forall y \in Y \quad x = y,$$

ce qui implique que $X = Y$ (dans ce cas en fait X est vide ou un singleton).

- Transitivité : soit $X, Y, Z \in \mathcal{P}(E)$ tels que $X \prec Y$ et $Y \prec Z$. Si $X = Y$ ou $Y = Z$ alors il est clair que $X \prec Z$. Supposons que $X \neq Y$ et $Y \neq Z$ alors

$$\forall x \in X \quad \forall y \in Y \quad x \leq y \quad \text{et} \quad \forall y \in Y \quad \forall z \in Z \quad y \leq z.$$

Donc on a

$$\forall x \in X \quad \forall y \in Y \quad \forall z \in Z \quad x \leq y \text{ et } y \leq z,$$

alors par transitivité de la relation \leq on obtient :

$$\forall x \in X \quad \forall z \in Z \quad x \leq z.$$

Donc $X \prec Z$.
