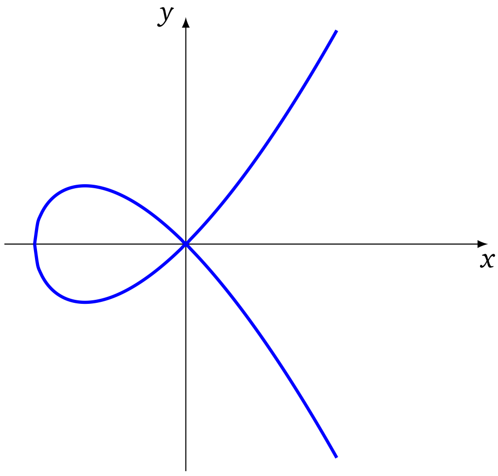
GRADIENT – THÉORÈME DES ACCROISSEMENTS FINIS

1 Tangentes et plans tangents

Exercice 1 – Tangentes

Soit $\mathscr{C}$ la courbe définie par l'équation :

$$y^2 - x^2(x+1) = 0.$$



1. Déterminer les points où les dérivées partielles de $f(x,y) = y^2 - x^2(x+1)$ s'annulent simultanément. Est-ce que ces points appartiennent à $\mathscr{C}$? Ces points seront exclus dans la suite de l'exercice.
2. Calculer l'équation de la tangente en un point de $\mathscr{C}$.
3. Pour quels points la tangente est-elle horizontale ? Verticale ?

Correction 1 –

1. $$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = -3x^2 - 2x \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2y.$$

   Si en (x,y) les deux dérivées partielles s'annulent, alors d'une part $2y = 0$ donc $y = 0$ et d'autre part $-3x^2 - 2x = -x(3x+2) = 0$ donc $x = 0$ ou $x = -\frac{2}{3}$.
   Ainsi f admet deux points critiques $(0,0)$ et $(-\frac{2}{3}, 0)$.
   On a $f(0,0) = 0$ donc $(0,0) \in \mathscr{C}$, par contre $f(-\frac{2}{3}, 0) \neq 0$ donc $(-\frac{2}{3}, 0) \notin \mathscr{C}$.
2. On fixe $(x_0, y_0) \in \mathscr{C} \setminus \{(0,0)\}$. L'équation de la tangente en ce point est :

   $$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)(y - y_0) = 0.$$

   Pour notre fonction f cela donne :

   $$(-3x_0^2 - 2x_0)(x - x_0) + 2y_0(y - y_0) = 0,$$

   ou encore :

   $$(-3x_0^2 - 2x_0)x + 2y_0 y + 3x_0^3 + 2x_0^2 - 2y_0^2 = 0.$$

   On peut encore simplifier un peu le terme constant en utilisant la relation $f(x_0, y_0) = 0$:

   $$-x_0(3x_0 + 2)x + 2y_0 y + x_0^3 = 0.$$
3. Rappelons que l'équation de la tangente en (x_0, y_0) est :

   $$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)(y - y_0) = 0.$$

Une droite horizontale a une équation du type $y = \text{cst}$, donc la tangente est horizontale si et seulement si $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = 0$. Or

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 0 \iff -3x^2 - 2x = 0 \iff x = 0 \text{ ou } x = -\frac{2}{3}.$$

Si $x_0 = 0$ alors, comme $f(x_0, y_0) = 0$, on obtient $y_0 = 0$, or le point $(0, 0)$ est exclu de l'étude (la tangente n'y est pas bien définie). Si $x_0 = -\frac{2}{3}$, alors $f(x_0, y_0) = 0$ implique $y_0^2 - \frac{4}{27} = 0$, donc $y_0 = \pm\frac{2}{3\sqrt{3}}$. Bilan : il y a deux points où la tangente est horizontale : $(-\frac{2}{3}, -\frac{2}{3\sqrt{3}})$, $(-\frac{2}{3}, +\frac{2}{3\sqrt{3}})$.

Une droite verticale a une équation du type $x = \text{cst}$, donc la tangente est verticale si et seulement si $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0$. Or $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0$ si et seulement si $y = 0$. Si $y_0 = 0$ alors la relation $f(x_0, y_0) = 0$ implique $x_0 = 0$ ou $x_0 = -1$. On a exclu $(0, 0)$, donc la tangente est verticale à $\mathscr{C}$ uniquement au point $(-1, 0)$.

Exercice 2 – Plans tangents

1. Trouver l'équation du plan tangent à la surface d'équation $z = \sin(\pi x y)\exp(2x^2 y - 1)$ au point $(1, \frac{1}{2}, 1)$.
2. Trouver l'équation du plan tangent à la surface d'équation $z = \sqrt{19 - x^2 - y^2}$ au point $(1, 3, 3)$.
3. Trouver les points sur le paraboloïde d'équation $z = 4x^2 + y^2$ où le plan tangent est parallèle au plan d'équation $x + 2y + z = 6$.

Indications 2 –

Le plan tangent à la surface d'équation $z = f(x, y)$ au point $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ est donné par l'équation :

$$z = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0).$$

Correction 2 –

On répond à la dernière question.

Le plan tangent à la surface d'équation $z = f(x, y)$ au point $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ est donné par l'équation :

$$z = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0).$$

Ainsi, le plan tangent à la surface d'équation $z = 4x^2 + y^2$ au point (x_0, y_0, z_0) a pour équation :

$$\begin{aligned} & z = (4x_0^2 + y_0^2) + 8x_0(x - x_0) + 2y_0(y - y_0) \\ \iff & z = 8x_0 x + 2y_0 y - (4x_0^2 + y_0^2). \end{aligned}$$

Donc l'équation est :

$$8x_0 x + 2y_0 y - z = 4x_0^2 + y_0^2.$$

Pour que ce plan soit parallèle au plan d'équation $x + 2y + z = 6$, il faut et il suffit que leurs vecteurs normaux $(8x_0, 2y_0, -1)$ et $(1, 2, 1)$ soient colinéaires. Le facteur de colinéarité est $\lambda = -1$, donc $x_0 = -\frac{1}{8}$ et $y_0 = -1$. Par conséquent, le point recherché sur le paraboloïde est le point $(-\frac{1}{8}, -1, \frac{17}{16})$.

Exercice 3 – Y'a comme un problème

On demande à un étudiant de trouver l'équation du plan tangent à la surface d'équation $z = x^4 - y^2$ au point $(2, 3, 7)$. Sa réponse est

$$z = 4x^3(x - 2) - 2y(y - 3).$$

1. Expliquer, sans calcul, pourquoi cela ne peut en aucun cas être la bonne réponse.
2. Quelle est l'erreur commise par l'étudiant ?
3. Donner la réponse correcte.

Indications 3 –
Ne pas confondre les variables pour l'équation de la surface, les variables pour l'équation de la tangente en un point, et les coordonnées du point de contact.

Correction 3 –

1. L'équation d'un plan tangent doit être une équation linéaire en x, y et z ! En plus le point $(2,3,7)$ ne vérifie pas l'équation proposée.
2. Il a confondu les coordonnées du point de contact et les variables de l'équation du plan.
3. L'équation du plan tangent à la surface $f(x,y,z)=k$ en (x_0,y_0,z_0) est :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0,z_0)(x-x_0)+\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0,z_0)(y-y_0)+\frac{\partial f}{\partial z}(x_0,y_0,z_0)(z-z_0)=0.$$

Ici $f(x,y,z)=x^4-y^2-z$, on vérifie d'abord que $f(2,3,7)=0$. Ensuite le plan tangent en $(2,3,7)$ a pour équation :

$$\begin{aligned}&\frac{\partial f}{\partial x}(2,3,7)(x-2)+\frac{\partial f}{\partial y}(2,3,7)(y-3)+\frac{\partial f}{\partial z}(2,3,7)(z-7)=0\\ \iff\ & 32(x-2)-6(y-3)-z+7=0\\ \iff\ & z=32x-6y-39\end{aligned}$$

On aurait aussi pu considérer que la surface est le graphe de la fonction de deux variable $g(x,y)=x^4-y^2$ et appliquer la formule adaptée :

$$z=g(x_0,y_0)+\frac{\partial g}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0)+\frac{\partial g}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0).$$

Exercice 4 – Cône
Soit $\mathscr{C}$ le cône d'équation $z^2=x^2+y^2$. On note $\mathscr{P}_{M_0}$ le plan tangent au cône $\mathscr{C}$ en $M_0\in\mathscr{C}\setminus\{(0,0,0)\}$.

1. Déterminer un vecteur normal et l'équation du plan tangent $\mathscr{P}_{M_0}$ en un point $M_0(x_0,y_0,z_0)$ du cône autre que l'origine.
2. Déterminer les autres points du cône ayant le même plan tangent que $\mathscr{P}_{M_0}$.

Indications 4 –
Un vecteur normal de la surface d'équation $f(x,y,z)=0$ au point (x_0,y_0,z_0) est le vecteur gradient en ce point.

Correction 4 –
Un vecteur normal de la surface d'équation $f(x,y,z)=0$ au point (x_0,y_0,z_0) est le vecteur gradient :

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0,z_0),\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0,z_0),\frac{\partial f}{\partial z}(x_0,y_0,z_0)\right).$$

1. Un vecteur normal du cône $\mathscr{C}$ au point (x_0,y_0,z_0) de $\mathscr{C}\setminus\{(0,0,0)\}$ est le vecteur $(x_0,y_0,-z_0)$ et le plan tangent au cône $\mathscr{C}$ en ce point est donné par l'équation :

$$x_0(x-x_0)+y_0(y-y_0)-z_0(z-z_0)=0,$$

c'est-à-dire :

$$x_0x+y_0y-z_0z=x_0^2+y_0^2-z_0^2=0 \quad \text{car } M_0\in\mathscr{C}.$$

2. Pour que $M_0'=(x_0',y_0',z_0')\in\mathscr{C}\setminus\{(0,0,0)\}$ vérifie $\mathscr{P}_{M_0'}=\mathscr{P}_{M_0}$, il faut et il suffit que les vecteurs $(x_0,y_0,-z_0)$ et $(x_0',y_0',-z_0')$ soient colinéaires, donc que (x_0,y_0,z_0) et (x_0',y_0',z_0') soient colinéaires. On en conclut que l'ensemble des points du cône ayant le même plan tangent que $\mathscr{P}_{M_0}$ est constitué de la droite (OM_0) privée du point O.

2 Approximations – Théorème des accroissements finis

Exercice 5 – Approximations
Utiliser une approximation affine bien choisie pour calculer une valeur approchée des nombres suivants :

$$\exp[\sin(3.16)\cos(0.02)], \qquad \arctan[\sqrt{4.03}-2\exp(0.01)], \qquad \exp[-0.02\sqrt{4.03}].$$

Indications 5 –
On prend

$$f(x,y)=\exp[\sin(\pi+x)\cos(y)]=\exp[-\sin(x)\cos(y)],\ (x_0,y_0)=(0,0),\ (h,k)=(0.02,0.02)$$
$$f(x,y)=\arctan\left[\sqrt{4+x}-2\exp(y)\right],\ (x_0,y_0)=(4,0),\ (h,k)=(0.03,0.01)$$
$$f(x,y)=\exp[-x\sqrt{y}],\ (x_0,y_0)=(0,4),\ (h,k)=(0.02,0.03).$$

Correction 5 –
La formule de l'approximation affine à l'ordre 1 (DL1) est :

$$f(x_0+h,y_0+k)\simeq f(x_0,y_0)+h\cdot\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)+k\cdot\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0).$$

1. Pour la première approximation on considère $3.16\simeq\pi+0.02$. On considère donc :

   $$f(x,y)=\exp[\sin(\pi+x)\cos(y)]=\exp[-\sin(x)\cos(y)], \quad (x_0,y_0)=(0,0), \quad (h,k)=(0.02,0.02).$$

   On calcule :

   $$\begin{aligned} f(x,y)=\exp[\sin(\pi+x)\cdot\cos(y)]=\exp[-\sin(x)\cdot\cos(y)] &\implies f(0,0)=1,\\ \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=-\cos x\cdot\cos y\cdot\exp[-\sin x\cdot\cos y] &\implies \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=-1,\\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\sin x\cdot\sin y\cdot\exp[-\sin x\cdot\cos y] &\implies \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=0.\end{aligned}$$

   L'approximation affine de f au voisinage de $(0,0)$ s'écrit donc

   $$f(h,k)\simeq 1-h.$$

   Avec $h=k=0.02$ on trouve $f(0.02,0.02)\simeq 0.98$.

2. De même avec

   $$f(x,y)=\arctan\left[\sqrt{4+x}-2\exp(y)\right], \quad (x_0,y_0)=(0,0), \quad (h,k)=(0.03,0.01).$$

   $$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}&=\frac{1}{2(1+(\sqrt{4+x}-2\exp(y))^2)\sqrt{4+x}}\\ \frac{\partial f}{\partial y}&=\frac{-2\exp(y)}{1+(\sqrt{4+x}-2\exp(y))^2}\end{aligned}$$

   etc. d'où, avec $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=\frac{1}{4}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=-2$,

   $$f(0+h,0+k)=f(0,0)+h\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)+k\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)+\cdots=\tfrac{1}{4}h-2k+\cdots$$

   Avec $h=0.03$ et $k=0.01$ on trouve, pour $\arctan[\sqrt{4.03}-2\exp(0.01)]$, la valeur approchée $0.0075-0.02=-0.0125$.

3. $$f(x,y) = \exp[-x\sqrt{y}], \quad (x_0,y_0) = (0,4), \quad (h,k) = (0.02, 0.03)$$

   On trouve :
   $$f(0+h, 4+k) \simeq 1 - 2\cdot h + 0\cdot k.$$

Exercice 6 – Résistances
Deux résistances R_1 et R_2 sont connectées en parallèle. La résistance totale R du circuit est donnée par la formule
$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}.$$
La résistance R_1 vaut environ 1 ; R_2 vaut environ 2 (en kilo-ohms). Écrire l'approximation linéaire correspondante, puis donner une valeur approchée de R lorsque $R_1 = 1.2$ et $R_2 = 1.9$.

Correction 6 –
Posons
$$f(x,y) = \frac{1}{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}} = \frac{xy}{x+y},$$
de sorte que $R = f(R_1, R_2)$. Par exemple, si $R_1 = 1$ et $R_2 = 2$, on trouve $R = \frac{2}{3} \simeq 0.666$.
On calcule :
$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{y^2}{(x+y)^2} \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{x^2}{(x+y)^2}.$$
Posons $(x_0, y_0) = (1,2)$. On a
$$f(x_0,y_0) = \frac{2}{3}, \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) = \frac{4}{9} \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) = \frac{1}{9}.$$
L'approximation linéaire de f au voisinage de (x_0, y_0) s'écrit donc
$$f(1+h, 2+k) \simeq \frac{2}{3} + \frac{4}{9}h + \frac{1}{9}k.$$
Avec $h = 0.2$ et $k = -0.1$, on trouve $f(1.2, 1.9) \simeq 0.744$.

Exercice 7 – Théorème des accroissements finis
Démontrer les résultats suivants énoncés dans le cours.

1. Soit $f : U \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur un ouvert convexe $U \subset \mathbb{R}^2$ muni de la norme euclidienne. On suppose qu'il existe $k > 0$ tel que
   $$\forall c \in U,\ \|\operatorname{grad} f(c)\| \leqslant k.$$
   Alors
   $$\forall a, b \in U,\ |f(b) - f(a)| \leqslant k\|b-a\|.$$
2. Soit $f : U \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur un ouvert convexe $U \subset \mathbb{R}^2$. Si $\operatorname{grad} f(x,y) = (0,0)$ pour tout $(x,y) \in U$, alors f est constante sur U.
3. Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$ telles que
   $$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ \operatorname{grad} f(x,y) = (3x^2 + 2y, 2x - 2y).$$

Indications 7 –

1. Appliquer le théorème des accroissements finis en une variable à la fonction $g(t) = f\big((1-t)a + tb\big)$.
2. Appliquer la question précédente.

3. Intégrer d'abord $\frac{\partial f}{\partial x}$. Attention à la « constante » !

Correction 7 – 1. Considérons $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ définie par :

$$g(t) = f\big((1-t)a + tb\big).$$

On a $g(0) = f(a)$ et $g(1) = f(b)$. Comme f est $\mathscr{C}^1$ alors f est continue et dérivable. On peut donc appliquer le théorème des accroissements finis en une variable à la fonction g. Il existe $s \in]0,1[$ tel que :

$$g(1) - g(0) = g'(s)(1-0).$$

On a déjà dit que $g(0) = f(a)$ et $g(1) = f(b)$.
Calculons $g'(t)$ comme la dérivée d'une composition. On peut refaire les calculs sur cet exemple ou bien utiliser la formule plus générale de la dérivée de $g(t) = f\big(x(t), y(t)\big)$:

$$g'(t) = x'(t)\frac{\partial f}{\partial x} + y'(t)\frac{\partial f}{\partial y} = \left\langle \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} \mid \operatorname{grad} f\big(x(t), y(t)\big) \right\rangle$$

Appliqué à notre exemple et en notant $a = (a_1, a_2)$, $b = (b_1, b_2)$:

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = (1-t)a + tb = \begin{pmatrix} (1-t)a_1 + tb_1 \\ (1-t)a_2 + tb_2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a_1 + b_1 \\ -a_2 + b_2 \end{pmatrix} = b - a$$

Ainsi :

$$g'(t) = \langle b - a \mid \operatorname{grad} f((1-t)a + tb)\rangle$$

Donc par l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$|g'(t)| \leqslant \|b-a\| \cdot \|\operatorname{grad} f\| \leqslant k\|b-a\|.$$

Ainsi l'égalité $g(1) - g(0) = g'(s)(1-0)$ implique l'inégalité :

$$|f(b) - f(a)| \leqslant k\|b-a\|.$$

2. Soient a, b deux points de U. Comme U est convexe on a le segment $[a,b]$ contenu dans U. Comme le gradient est partout nul, on peut choisir $k = 0$ comme constante dans la formule de la question précédente, ce qui donne immédiatement :

$$|f(b) - f(a)| \leqslant 0.$$

Et donc $f(a) = f(b)$. Ainsi la valeur de f en deux points quelconque de U est toujours la même, c'est exactement dire que f est une fonction constante.

3. Dans la pratique on intègre par rapport à une variable, puis par rapport à l'autre, en prenant bien soin d'expliquer les constantes d'intégration.
Intégrer d'abord $\frac{\partial f}{\partial x}$. Comme $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 3x^2 + 2y$ alors :

$$f(x,y) = x^3 + 2xy + C(y).$$

C est une constante pour la variable x, mais peut dépendre de la variable y, c'est donc une fonction de y.
Repartant de cette expression, l'équation $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2x - 2y$ devient :

$$2x + C'(y) = 2x - 2y.$$

Donc $C'(y) = -2y$ d'où $C(y) = -y^2 + K$, où $K \in \mathbb{R}$. Conclusion : les solutions cherchées sont de la forme $f(x,y) = x^3 + 2xy - y^2 + K$ et on vérifie qu'elles conviennent, quel que soit $K \in \mathbb{R}$.

Corrections : Arnaud Bodin, Stephan de Bièvre. Relecture : Axel Renard.