MATRICE JACOBIENNE

1 Matrice jacobienne et composition

Exercice 1 – Dérivées d'une composition
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable. Calculer les dérivées partielles de :

$$g(x,y) = f(x+y), \qquad h(x,y) = f(x^2+y^2), \qquad k(x,y) = f(xy).$$

Indications 1 –
Pour calculer les dérivées partielles par rapport à une variable, interpréter les autres variables comme paramètres et utiliser les règles ordinaires de calcul de la dérivée.

Correction 1 –

$$\begin{aligned}
\frac{\partial g}{\partial x}(x,y) &= f'(x+y) & \qquad \frac{\partial g}{\partial y}(x,y) &= f'(x+y)\\
\frac{\partial h}{\partial x}(x,y) &= 2xf'(x^2+y^2) & \qquad \frac{\partial h}{\partial y}(x,y) &= 2yf'(x^2+y^2)\\
\frac{\partial k}{\partial x}(x,y) &= yf'(xy) & \qquad \frac{\partial k}{\partial y}(x,y) &= xf'(xy)
\end{aligned}$$

Exercice 2 – Équation aux dérivées partielles
Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ et soit $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par :

$$g(x,y,z) = f(x-y, y-z, z-x).$$

Montrer que :

$$\frac{\partial g}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\partial g}{\partial z} = 0.$$

Indications 2 –
Écrire g sous la forme $f \circ \Phi$ et appliquer la formule « $J_g = J_f \times J_\Phi$ ».

Correction 2 –
On a $g = f \circ \Phi$ où $\Phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ est définie par $\Phi(x,y,z) = (x-y, y-z, z-x)$. On souhaite appliquer la formule de la matrice jacobienne d'une composition « $J_g = J_f \times J_\Phi$ ». Plus précisément :

$$J_g(x,y,z) = J_f\big(\Phi(x,y,z)\big) \times J_\Phi(x,y,z).$$

Or les matrices jacobiennes de f et g sont des matrices-lignes :

$$J_f(x,y,z) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) & \frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) & \frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) \end{pmatrix}$$

et

$$J_g(x,y,z) = \begin{pmatrix} \frac{\partial g}{\partial x}(x,y,z) & \frac{\partial g}{\partial y}(x,y,z) & \frac{\partial g}{\partial z}(x,y,z) \end{pmatrix}.$$

La matrice jacobienne de Φ est ici une matrice ayant des coefficients indépendants de x, y, z :

$$J_\Phi(x,y,z) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

La formule « $J_g = J_f \times J_\Phi$ » permet donc d'exprimer les dérivées partielles de g en fonction de celles de f. Par exemple on trouve :

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x,y,z) = \frac{\partial f}{\partial x}\big(\Phi(x,y,z)\big) - \frac{\partial f}{\partial z}\big(\Phi(x,y,z)\big).$$

On résume les résultats en :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial g}{\partial x} &= \frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial z} \\
\frac{\partial g}{\partial y} &= \frac{\partial f}{\partial y} - \frac{\partial f}{\partial x} \\
\frac{\partial g}{\partial z} &= \frac{\partial f}{\partial z} - \frac{\partial f}{\partial y}
\end{aligned}$$

En faisant la somme, on obtient l'égalité cherchée.

Exercice 3 – Matrices jacobiennes et composition

On considère les fonctions $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ et $g : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ définies par :

$$f(x,y) = \big(\sin(x+y), xy, \exp(y^2)\big), \quad g(u,v,w) = uvw.$$

1. Calculer explicitement $g \circ f$.
2. En utilisant l'expression trouvée à la première question, calculer les dérivées partielles de $g \circ f$.
3. Déterminer les matrices jacobiennes $J_f(x,y)$ et $J_g(u,v,w)$ de f et de g.
4. Retrouver les dérivées partielles de g en utilisant cette fois un produit approprié de matrices jacobiennes.

Indications 3 –

Les variables x,y,z et u,v,w sont liées par la relation suivante : $f(x,y) = (\sin(x+y), xy, \exp(y^2)) = (u,v,w)$.

Correction 3 –

1. $g(f(x,y)) = xy \cdot \sin(x+y) \cdot \exp(y^2)$
2. $$\begin{aligned}
\frac{\partial(g\circ f)}{\partial x}(x,y) &= \big(\sin(x+y) + x\cos(x+y)\big)\cdot y \cdot e^{y^2} \\
\frac{\partial(g\circ f)}{\partial y}(x,y) &= \big((2y^2+1)\sin(x+y) + y\cos(x+y)\big)\cdot x \cdot e^{y^2}
\end{aligned}$$
3. On note u,v,w les trois composantes de f, c'est-à-dire : $f(x,y) = (\sin(x+y), xy, \exp(y^2)) = (u,v,w)$. Il faut considérer u,v,w à la fois comme des fonctions (par exemple $(x,y) \mapsto u(x,y) = \sin(x+y)$) mais aussi comme le nom de nouvelles variables.

   Ainsi la matrice jacobienne J_f de f est une matrice 3×2 et s'écrit :

   $$J_f(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(x+y) & \cos(x+y) \\ y & x \\ 0 & 2ye^{y^2} \end{pmatrix}.$$

   De même, la matrice jacobienne J_g de g est une matrice-ligne :

   $$J_g(u,v,w) = \begin{pmatrix} \frac{\partial g}{\partial u} & \frac{\partial g}{\partial v} & \frac{\partial g}{\partial w} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} vw & uw & uv \end{pmatrix}.$$

   On aura besoin de cette matrice exprimée à l'aide des variables x,y,z, c'est-à-dire où l'on a substitué u,v,w par leur expression en x et y :

   $$J_g\big(f(x,y)\big) = \begin{pmatrix} xy\exp(y^2) & \sin(x+y)\exp(y^2) & \sin(x+y)xy \end{pmatrix}.$$

4. La matrice jacobienne $J_{g\circ f}$ de la fonction composée $g\circ f$ s'écrit comme produit matriciel : « $J_{g\circ f} = J_g \times J_f$ ». Plus précisément cette formule est $J_{g\circ f}(x,y) = J_g(f(x,y)) \times J_f(x,y)$. En gardant la notation simplifiée on a :

$$J_{g\circ f} = J_g \times J_f = \begin{pmatrix} \frac{\partial g}{\partial u} & \frac{\partial g}{\partial v} & \frac{\partial g}{\partial w} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} \end{pmatrix}.$$

Le résultat est une matrice-ligne de longueur 2 qui est :

$$J_{g\circ f} = \begin{pmatrix} \frac{\partial (g\circ f)}{\partial x} & \frac{\partial (g\circ f)}{\partial y} \end{pmatrix}.$$

En calculant le produit de matrice et en identifiant les coefficients de $J_{g\circ f}$ avec ceux de $J_g \times J_f$, on retrouve :

$$\frac{\partial (g\circ f)}{\partial x}(x,y) = \big(\sin(x+y) + x\cos(x+y)\big)\cdot y \cdot e^{y^2}$$
$$\frac{\partial (g\circ f)}{\partial y}(x,y) = \big((2y^2+1)\sin(x+y) + y\cos(x+y)\big)\cdot x \cdot e^{y^2}$$

Exercice 4 – Coordonnées polaires

Soit $\Phi :]0,+\infty[\times [0,2\pi[\to \mathbb{R}^2$ le changement de coordonnées polaires défini par :

$$(r,\theta) \longmapsto (x,y) = (r\cos\theta, r\sin\theta).$$

1. Calculer la matrice jacobienne de Φ.
2. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x,y) \mapsto f(x,y)$. On note $g = f\circ\Phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(r,\theta) \mapsto f(r\cos\theta, r\sin\theta)$. Calculer les dérivées partielles de g (par rapport à r et θ) en fonction des dérivées partielles de f (par rapport à x et y).
3. On considère une solution f de l'équation aux dérivées partielles :

$$y\frac{\partial f}{\partial x} - x\frac{\partial f}{\partial y} = 0.$$

Quelle équation satisfait alors $g = f\circ\Phi$? Résoudre cette équation et l'équation initiale.

Correction 4 – 1. Les deux composantes de Φ sont $x = r\cos\theta$ et $y = r\sin\theta$. Ainsi :

$$J_\Phi(r,\theta) = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix}.$$

2. Comme $g = f\circ\Phi$, on applique la formule « $J_g = J_f \times J_\Phi$ » où :

$$J_g = \begin{pmatrix} \frac{\partial g}{\partial r} & \frac{\partial g}{\partial \theta} \end{pmatrix} \qquad J_f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix}.$$

Par la formule « $J_g = J_f \times J_\Phi$ » on obtient :

$$\frac{\partial g}{\partial r} = \cos\theta\frac{\partial f}{\partial x} + \sin\theta\frac{\partial f}{\partial y},$$
$$\frac{\partial g}{\partial \theta} = -r\sin\theta\frac{\partial f}{\partial x} + r\cos\theta\frac{\partial f}{\partial y}.$$

Il est plus rigoureux de préciser en quelles valeurs les fonctions doivent être évaluées, par exemple :

$$\frac{\partial g}{\partial r}(r,\theta) = \cos\theta\frac{\partial f}{\partial x}(r\cos\theta, r\sin\theta) + \sin\theta\frac{\partial f}{\partial y}(r\cos\theta, r\sin\theta).$$

3. Supposons que $f(x,y)$ vérifie l'équation aux dérivées partielles $y\frac{\partial f}{\partial x} - x\frac{\partial f}{\partial y} = 0$.
Par la question précédente, et toujours en notant $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$, on remarque que :

$$\frac{\partial g}{\partial \theta} = -r\sin\theta\frac{\partial f}{\partial x} + r\cos\theta\frac{\partial f}{\partial y} = -y\frac{\partial f}{\partial x} + x\frac{\partial f}{\partial y}.$$

Donc si $f(x,y)$ satisfait l'équation aux dérivées partielles précédente, alors $g(r,\theta)$ satisfait une équation très simple :

$$\frac{\partial g}{\partial \theta} = 0.$$

Il est facile de trouver les fonctions g satisfaisant cette équation. Puisque la dérivée partielle de g par rapport à θ est nulle cela signifie que g ne dépend pas de la variable θ, autrement dit elle ne dépend que de la variable r. Ainsi il existe une fonction $k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, telle que :

$$g(r,\theta) = k(r).$$

Comme $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ alors $r = \sqrt{x^2+y^2}$, donc

$$g(r,\theta) = f(r\cos\theta, r\sin\theta) = k(r)$$

et devient :

$$f(x,y) = k\big(\sqrt{x^2+y^2}\big).$$

Quitte à changer k, on pourrait aussi écrire $f(x,y) = k(x^2+y^2)$.
Géométriquement cela signifie que la valeur de f en (x,y) ne dépend que la distance r entre (x,y) et l'origine et pas de l'angle θ de ce point avec l'horizontale. En particulier le graphe de f, est symétrique par rotation autour de l'axe (Oz).

Exercice 5 – Fonctions homogènes
Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction $\mathscr{C}^1$ telle que :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad \forall t > 0 \qquad f(tx,ty) = tf(x,y). \tag{H}$$

Montrer que f est linéaire.
Indication. Commencer par dériver la formule d'homogénéité (H) par rapport à t.

Indications 5 –
Utiliser que

$$\frac{d}{dt}f\big(x(t),y(t)\big) = x'(t)\frac{\partial f}{\partial x}\big(x(t),y(t)\big) + y'(t)\frac{\partial f}{\partial y}\big(x(t),y(t)\big).$$

Correction 5 –
On rappelle la formule :

$$\frac{d}{dt}f\big(x(t),y(t)\big) = x'(t)\frac{\partial f}{\partial x}\big(x(t),y(t)\big) + y'(t)\frac{\partial f}{\partial y}\big(x(t),y(t)\big).$$

que l'on peut abréger en :

$$\frac{d}{dt}f\big(x(t),y(t)\big) = x'(t)\frac{\partial f}{\partial x} + y'(t)\frac{\partial f}{\partial y}.$$

Fixons (x_0,y_0) et $x(t) = tx_0$, $y(t) = ty_0$. On note $g(t) = f(tx_0,ty_0)$, $t \in]0,+\infty[$. Alors d'une part g est une fonction linéaire (pour sa variable t) car :

$$g(t) = f(tx_0,ty_0) = tf(x_0,y_0).$$

Donc sa dérivée est :

$$g'(t) = f(x_0,y_0).$$

D'autre part $x'(t) = x_0$, $y'(t) = y_0$ donc par la formule de la dérivée d'une composition que l'on a rappelée ci-dessus, on a :

$$g'(t) = \frac{d}{dt} f\big(x(t), y(t)\big) = x_0 \cdot \frac{\partial f}{\partial x}(tx_0, ty_0) + y_0 \cdot \frac{\partial f}{\partial y}(tx_0, ty_0).$$

Ainsi, quel que soit $t > 0$:

$$f(x_0, y_0) = x_0 \cdot \frac{\partial f}{\partial x}(tx_0, ty_0) + y_0 \cdot \frac{\partial f}{\partial y}(tx_0, ty_0).$$

La fonction f étant de classe $\mathscr{C}^1$, les dérivées partielles sont continues à l'origine. En particulier lorsque $t \to 0$, on trouve :

$$f(x_0, y_0) = x_0 \cdot \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) + y_0 \cdot \frac{\partial f}{\partial y}(0,0).$$

Bilan : si on note $a = \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ et $b = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$, alors :

$$f(x_0, y_0) = ax_0 + by_0$$

où $a, b \in \mathbb{R}$ sont des constantes (indépendantes de (x_0, y_0)). La formule étant valable quel que soit (x_0, y_0), f est bien une fonction linéaire :

$$f(x, y) = ax + by$$

quel que soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

2 Gradient, divergence, rotationnel

Exercice 6 – Gradient, divergence, rotationnel

∇ (qui se lit « nabla ») correspond à l'opérateur $\nabla = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial}{\partial x_n} \end{pmatrix}$.

Le *gradient* de $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est :

$$\operatorname{grad} f(x) = \nabla f(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(x) \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n}(x) \end{pmatrix}.$$

La *divergence* de $F = (f_1, \dots, f_n) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ se calcule à l'aide du produit scalaire « $\cdot$ » :

$$\operatorname{div} F(x) = \nabla \cdot F(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial x_i}(x).$$

Le *rotationnel* de $F = (f_1, f_2, f_3) : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ se calcule à l'aide du produit vectoriel « $\wedge$ » :

$$\operatorname{rot} F(x,y,z) = \nabla \wedge F(x,y,z) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_3}{\partial y}(x,y,z) - \frac{\partial f_2}{\partial z}(x,y,z) \\ \frac{\partial f_1}{\partial z}(x,y,z) - \frac{\partial f_3}{\partial x}(x,y,z) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x}(x,y,z) - \frac{\partial f_1}{\partial y}(x,y,z) \end{pmatrix}.$$

1. Calculer le gradient de $f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2$.
2. Calculer la divergence et le rotationnel de $F(x,y,z) = (x^2 z, y^2 + xz, x^2 y^2 - z)$. Même question avec $F(x,y,z) = (x \cos y, y \cos z, z \cos x)$.
3. Calculer le rotationnel de $F(x,y,z) = (2xy + z^3, x^2 - 2yz, 4z - y^2 + 3xz^2)$. Trouver $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ tel que $\operatorname{grad} f(x,y,z) = F(x,y,z)$. On dit que F dérive d'un potentiel scalaire.

4. Soit $G(x,y,z) = (xyz, x^2+y^2+z^2, x+y+z)$. Soit $F = \operatorname{rot}(G)$ (on dit que F dérive d'un potentiel vectoriel). Calculer $\operatorname{div} F$.
5. Soit $E : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ le champ newtonien défini par : $E(M) = k\frac{\overrightarrow{OM}}{\|\overrightarrow{OM}\|^3}$, où k est une constante, $O = (0,0,0)$ l'origine et $M(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. Déterminer l'expression de E via les coordonnées (x,y,z) de M. Calculer la divergence et le rotationnel de E.

Indications 6 –
Pour la dernière question, divergence et rotationnel sont nuls.

Correction 6 – 1. $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x) = 2x_i$, donc

$$\operatorname{grad} f(x) = \nabla f(x) = 2\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = 2x.$$

2. (a) $F(x,y,z) = (f_1, f_2, f_3) = (x^2z, y^2+xz, x^2y^2-z)$.

$$\operatorname{div} F(x) = \nabla \cdot F(x) = \frac{\partial f_1}{\partial x}(x,y,z) + \frac{\partial f_2}{\partial y}(x,y,z) + \frac{\partial f_3}{\partial z}(x,y,z) = 2xz + 2y - 1.$$

$$\operatorname{rot} F(x,y,z) = \nabla \wedge F(x,y,z) = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_3}{\partial y} - \frac{\partial f_2}{\partial z} \\ \frac{\partial f_1}{\partial z} - \frac{\partial f_3}{\partial x} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x^2y - x \\ x^2 - 2xy^2 \\ z \end{pmatrix}.$$

(b) $F(x,y,z) = (x\cos y, y\cos z, z\cos x)$.

$$\operatorname{div} F(x) = \cos y + \cos z + \cos x.$$

$$\operatorname{rot} F(x,y,z) = \begin{pmatrix} y\sin z \\ z\sin x \\ x\sin y \end{pmatrix}.$$

3. $F(x,y,z) = (2xy + z^3, x^2 - 2yz, 4z - y^2 + 3xz^2)$.

$$\operatorname{rot} F(x,y,z) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Il existe un théorème qui dit que lorsque le rotationnel est nul, alors F dérive d'un potentiel scalaire, c'est-à-dire que l'on peut trouver $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ telle que $F = \operatorname{grad} f$.
Cherchons donc un f qui doit vérifier ici :

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2xy + z^3 \\ x^2 - 2yz \\ 4z - y^2 + 3xz^2 \end{pmatrix}.$$

Partons par exemple de l'équation $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = 2xy + z^3$. On l'intègre par rapport à la variable x :

$$f(x,y,z) = x^2y + xz^3 + C$$

où C est une constante pour la variable x, mais attention ! elle peut dépendre des variables y et z. Donc C est en fait une fonction $C(y,z)$.

On sait donc que $f(x,y,z) = x^2y + xz^3 + C(y,z)$, donc

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) = x^2 + \frac{\partial C}{\partial y}(y,z).$$

Mais d'autre part on doit avoir :

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) = x^2 - 2yz.$$

Donc :

$$x^2 + \frac{\partial C}{\partial y}(y,z) = x^2 - 2yz,$$

ce qui conduit à :

$$\frac{\partial C}{\partial y}(y,z) = -2yz.$$

On intègre cette fois par rapport à la variable y pour trouver :

$$C(y,z) = -y^2z + D(z),$$

et donc

$$f(x,y,z) = x^2y + xz^3 - y^2z + D(z),$$

où $D(z)$ est une fonction à déterminer.

En dérivant cette expression par rapport à z et en identifiant avec la troisième composante du gradient, on doit avoir :

$$3xz^2 - y^2 + \frac{\partial D}{\partial z}(z) = 4z - y^2 + 3xz^2.$$

Donc $D'(z) = \frac{\partial D}{\partial z}(z) = 4z$. Donc $D(z) = 2z^2 + E$, où $E \in \mathbb{R}$ est une vraie constante. On peut choisir $E = 0$.

Bilan : $f(x,y,z) = x^2y + xz^3 - y^2z + 2z^2$.

4. $G(x,y,z) = (xyz, x^2 + y^2 + z^2, x + y + z)$.

$$F(x,y,z) = \mathrm{rot}(G) = \begin{pmatrix} 1-2z \\ -1+xy \\ 2x - xz \end{pmatrix}.$$

On calcule alors :

$$\mathrm{div}\, F = 0.$$

Remarque. Lorsque $F = \mathrm{rot}(G)$, on dit que F dérive d'un potentiel vectoriel et alors il existe un théorème affirmant que l'on a toujours $\mathrm{div}(\mathrm{rot}(G)) = 0$.

5. (a) Calcul de E.

$$\overrightarrow{OM} = (x,y,z) \qquad \|\overrightarrow{OM}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Ainsi, le champ E s'écrit :

$$E(M) = k\frac{\overrightarrow{OM}}{\|\overrightarrow{OM}\|^3} = k\frac{(x,y,z)}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}$$

C'est-à-dire

$$E(x,y,z) = \left(\frac{kx}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}, \frac{ky}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}, \frac{kz}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}\right).$$

(b) Divergence.

Notons $E=(f_1,f_2,f_3)$. Alors avec $f_1(x,y,z)=\frac{kx}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}$, on a :

$$\frac{\partial f_1}{\partial x}=\frac{k}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}-\frac{3kx^2}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}}.$$

De façon similaire par symétrie, on obtient :

$$\frac{\partial f_2}{\partial y}=\frac{k}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}-\frac{3ky^2}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}},$$

$$\frac{\partial f_3}{\partial z}=\frac{k}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}-\frac{3kz^2}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}}.$$

Pour calculer la divergence on fait la somme de ces trois dérivées :

$$\begin{aligned}\operatorname{div} E &= \frac{\partial f_1}{\partial x}+\frac{\partial f_2}{\partial y}+\frac{\partial f_3}{\partial z}\\ &= \frac{3k}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}-\frac{3k(x^2+y^2+z^2)}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}}\\ &= \frac{3k}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}-\frac{3k}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\\ &= 0\end{aligned}$$

Bilan : la divergence est nulle.

(c) Rotationnel.

$$\operatorname{rot} E(x,y,z)=\begin{pmatrix}\frac{\partial}{\partial x}\\ \frac{\partial}{\partial y}\\ \frac{\partial}{\partial z}\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}f_1\\ f_2\\ f_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{\partial f_3}{\partial y}-\frac{\partial f_2}{\partial z}\\ \frac{\partial f_1}{\partial z}-\frac{\partial f_3}{\partial x}\\ \frac{\partial f_2}{\partial x}-\frac{\partial f_1}{\partial y}\end{pmatrix}$$

Calculons $\frac{\partial f_3}{\partial y}$ où $f_3=\frac{kz}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}$:

$$\frac{\partial f_3}{\partial y}=-\frac{3kyz}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}}.$$

Calculons $\frac{\partial f_2}{\partial z}$ où $f_2=\frac{ky}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}$:

$$\frac{\partial f_2}{\partial z}=-\frac{3kyz}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}}.$$

Ainsi la première composante du rotationnel est nulle :

$$\frac{\partial f_3}{\partial y}-\frac{\partial f_2}{\partial z}=0.$$

Par symétrie on trouve aussi zéro pour les autres composantes.

Conclusion : le rotationnel est le vecteur nul.

Corrections : Arnaud Bodin. Relecture : Axel Renard.