NOTIONS DE TOPOLOGIE

1 Norme et produit scalaire

Exercice 1 – Produit scalaire et vecteurs

1. Montrer que si $X = \binom{x}{y}$ et $Y = \binom{x'}{y'}$ sont des vecteurs de $\mathbb{R}^2$ alors
$$\langle X \mid Y \rangle = 3xx' + 2yy'$$
définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}^2$.
2. Même question avec
$$\langle X \mid Y \rangle = 2xx' + yy' + xy' + x'y.$$
3. Soient x, y et z trois réels tels que $x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 1$. Montrer que $(x + 2y + 3z)^2 \leqslant 14$.

Indications 1 –
Les trois axiomes qui définissent un produit scalaire sont : la linéarité à gauche et à droite, la symétrie et le caractère défini positif. Le principal résultat à connaître est l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

Correction 1 –
Rappelons les trois axiomes qui définissent un produit scalaire : la linéarité à gauche et à droite, la symétrie et le caractère défini positif. Il est plus malin de commencer par vérifier la symétrie, ainsi on aura juste à prouver la linéarité à gauche et alors la linéarité à droite en découlera.

1. — Symétrie : $\langle Y \mid X \rangle = 3x'x + 2y'y = \langle X \mid Y \rangle$.
   — Linéarité à gauche, pour $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$:
$$\begin{aligned}\langle \lambda X_1 + \mu X_2 \mid Y \rangle &= 3(\lambda x_1 + \mu x_2)x' + 2(\lambda y_1 + \mu y_2)y' \\ &= \lambda(3x_1x' + 2y_1y') + \mu(3x_2x' + 2y_2y') \\ &= \lambda\langle X_1 \mid Y \rangle + \mu\langle X_2 \mid Y \rangle\end{aligned}$$
   — Positivité : $\langle X \mid X \rangle = 3x^2 + 2y^2 \geqslant 0$. Définie : $\langle X \mid X \rangle = 0 \iff 3x^2 + 2y^2 = 0 \iff X = (0,0)$.
2. La symétrie et la bilinéarité sont faciles à vérifier.
   Montrons le caractère positif :
$$\langle X \mid X \rangle = 2x^2 + y^2 + 2xy = x^2 + (x + y)^2 \geqslant 0.$$
   Une fois écrit sous la forme de la somme de carrés, il est clair que $\langle X \mid X \rangle = 0 \iff X = (0,0)$.
3. À un produit scalaire on associe une norme par la formule $\langle X \mid X \rangle = \|X\|^2$. L'inégalité de Cauchy-Schwarz s'écrit : $\langle X \mid Y \rangle^2 \leqslant \|X\|^2\|Y\|^2$.
   Pour cette question on considère le produit scalaire usuel de $\mathbb{R}^3$: si $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ alors $\langle X \mid Y \rangle = xx' + yy' + zz'$.
   On applique l'inégalité de Cauchy-Schwarz aux vecteurs $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, ce qui donne : $(1\cdot x + 2\cdot y + 3\cdot z)^2 \leqslant (x^2+y^2+z^2)(1^2+2^2+3^2)$. Par hypothèse $x^2+y^2+z^2 \leqslant 1$, donc $(x+2y+3z)^2 \leqslant 14$.

Exercice 2 – Produit scalaire et intégrales
Soit E l'ensemble des fonctions continues sur un segment $[a, b]$.

1. Montrer que
$$\langle f \mid g\rangle = \int_a^b f(t)g(t)\,dt$$
définit un produit scalaire sur E.
2. Montrer que pour tout $f \in E$:
$$\left(\int_a^b f(t)dt\right)^2 \leqslant (b-a)\int_a^b \big(f(t)\big)^2 dt$$
3. Montrer que pour toute fonction continue et strictement positive sur $[a,b]$:
$$\int_a^b f(t)dt \times \int_a^b \frac{1}{f(t)}dt \geqslant (b-a)^2$$

Indications 2 –
Pour 3. faire $\left\langle \sqrt{f} \mid \frac{1}{\sqrt{f}} \right\rangle$.

Correction 2 –

1. — Symétrie : $\langle f \mid g\rangle = \int_a^b f(t)g(t)\,dt = \langle g \mid f\rangle$.
   — Linéarité à gauche, pour $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$: $\langle \lambda f_1 + \mu f_2 \mid g\rangle = \lambda\langle f_1 \mid g\rangle + \mu\langle f_2 \mid g\rangle$ par la linéarité de l'intégrale.
   — Définie positive : $\langle f \mid f\rangle = \int_a^b f^2(t)\,dt \geqslant 0$, par la positivité de l'intégrale. Et comme f continue, si $\langle f \mid f\rangle = 0$ alors $\int_a^b f^2(t)\,dt = 0$ entraîne $f = 0$ (la fonction identiquement nulle sur $[a,b]$).
2. On associe une norme au produit scalaire par la formule
$$\|f\|^2 = \langle f \mid f\rangle = \int_a^b f^2(t)\,dt.$$
On applique l'inégalité de Cauchy-Schwarz à une fonction f quelconque et à la fonction g définie par $g(t) = 1$ (pour tout $t \in [a,b]$) donc : $\langle f \mid g\rangle^2 \leqslant \|f\|^2\|g\|^2$. Comme l'intégrale de $g^2(t) = 1$ vaut $b-a$, on obtient
$$\left(\int_a^b f(t)\cdot 1\cdot dt\right)^2 \leqslant \int_a^b f^2(t)\,dt \times (b-a).$$
3. On considère les fonctions $\sqrt{f}$ et $\frac{1}{\sqrt{f}}$. On a
$$\left\langle \sqrt{f} \mid \frac{1}{\sqrt{f}} \right\rangle = \int_a^b \sqrt{f}\frac{1}{\sqrt{f}}\,dt = \int_a^b 1\,dt = b-a.$$
On applique l'inégalité de Cauchy-Schwarz $\langle u \mid v\rangle^2 \leqslant \|u\|^2\|v\|^2$ avec $u = \sqrt{f}$ et $v = 1/\sqrt{f}$ qui donne l'inégalité cherchée.

Exercice 3 – Trois normes
Soit $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. On pose
$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i| \qquad \|x\|_2 = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^2\right)^{1/2} \qquad \|x\|_\infty = \max\{|x_i|\ ;\ 1 \leqslant i \leqslant n\}$$

1. Représenter dans $\mathbb{R}^2$ la boule unité fermée $B = \{x = (x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2\ ;\ \|x\| \leqslant 1\}$ pour chacune des normes $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2$ et $\|\cdot\|_\infty$.

2. Démontrer que $\|\cdot\|_1$ est une norme sur $\mathbb{R}^n$.
3. Démontrer, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, que

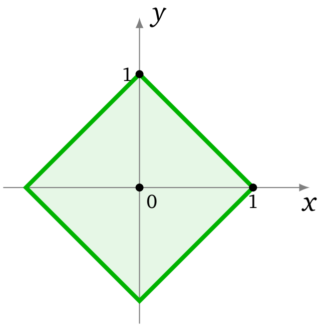
$$\|x\|_\infty \leqslant \|x\|_2 \leqslant \|x\|_1 \leqslant n\|x\|_\infty.$$

4. Affiner certaines inégalités précédentes :

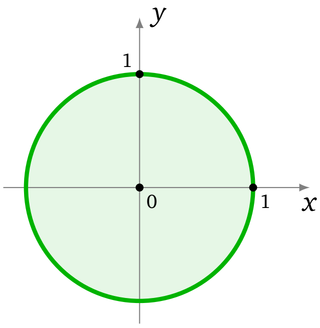
$$\|x\|_2 \leqslant \sqrt{n} \cdot \|x\|_\infty \qquad \text{et} \qquad \|x\|_1 \leqslant \sqrt{n} \cdot \|x\|_2.$$

Indications 3 –
Pour la toute dernière inégalité, penser à Cauchy-Schwarz.

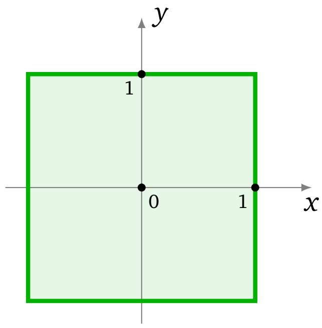
Correction 3 –



Norme 1



Norme 2
Norme euclidienne



Norme infinie

1. Les boules unités des trois normes sont dessinées ci-dessus.
2. $\|x\|_1 = |x_1| + \cdots + |x_n|$. La preuve que c'est une norme repose sur le fait que la valeur absolue est une norme de $\mathbb{R}$:
   — Positivité : $\|x\|_1 \geqslant 0$ et en plus $\|x\|_1 = 0 \iff |x_1| = 0, \ldots, |x_n| = 0 \iff x = (0, \ldots, 0)$.
   — Homogénéité : pour $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$\|\lambda x\|_1 = |\lambda x_1| + \cdots + |\lambda x_n| = |\lambda||x_1| + \cdots + |\lambda||x_n| = |\lambda| \cdot \|x\|_1.$$

   — Inégalité triangulaire :

$$\|x+y\|_1 = |x_1 + y_1| + \cdots + |x_n + y_n| \leqslant |x_1| + |y_1| + \cdots + |x_n| + |y_n| = \|x\|_1 + \|y\|_1.$$

3. — $\|x\|_\infty \leqslant \|x\|_2$.
   Notons $i_{\max}$ un indice tel que $\|x\|_\infty = |x_{i_{\max}}|$. Alors $|x_{i_{\max}}|^2 \leqslant |x_1|^2 + \cdots + |x_n|^2$, donc $\|x\|_\infty^2 \leqslant \|x\|_2^2$.
   — $\|x\|_2 \leqslant \|x\|_1$.
   Développons $\|x\|_1^2 = (|x_1| + \cdots |x_n|)^2 = |x_1|^2 + \cdots + |x_n|^2 + \text{termes croisés} \geqslant |x_1|^2 + \cdots + |x_n|^2 = \|x\|_2^2$.
   — $\|x\|_1 \leqslant n\|x\|_\infty$.
   Pour tout i, $|x_i| \leqslant |x_{i_{\max}}| = \|x\|_\infty$, donc $\|x\|_1 = |x_1| + \cdots + |x_n| \leqslant n\|x\|_\infty$.
4. — $\|x\|_2 \leqslant \sqrt{n} \cdot \|x\|_\infty$.
   $\|x\|_2^2 = |x_1|^2 + \cdots + |x_n|^2 \leqslant n\|x\|_\infty^2$.
   — $\|x\|_1 \leqslant \sqrt{n} \cdot \|x\|_2$.
   On utilise l'inégalité de Cauchy-Schwarz pour le produit scalaire usuel de $\mathbb{R}^n$ entre x et $y = (1, 1, \ldots, 1)$. La norme associée à ce produit scalaire est la norme $\|\cdot\|_2$. L'inégalité est $\langle x \mid y \rangle \leqslant$

$\|x\|_2\|y\|_2$. On a ici $\langle x \mid y\rangle = x_1\cdot 1 + x_2\cdot 1 + \cdots + x_n\cdot 1$ et $\|y\|_2 = \sqrt{1+1+\cdots+1} = \sqrt{n}$. Dans le cas où $x_i \geqslant 0$, alors $|x_i| = x_i$ et on a bien prouvé $\|x\|_1 \leqslant \sqrt{n}\|x\|_2$.
Si certains x_i sont négatifs, il faut changer certains signes dans le vecteur y. Plus précisément, on change le $+1$ en un moins -1 pour les rangs i où $x_i < 0$. Une autre façon de faire est d'écrire $y = (\mathrm{sgn}(x_1), \dots, \mathrm{sgn}(x_n))$ où $\mathrm{sgn}(u)$ vaut $+1$ si $u \geqslant 0$ et -1 sinon.

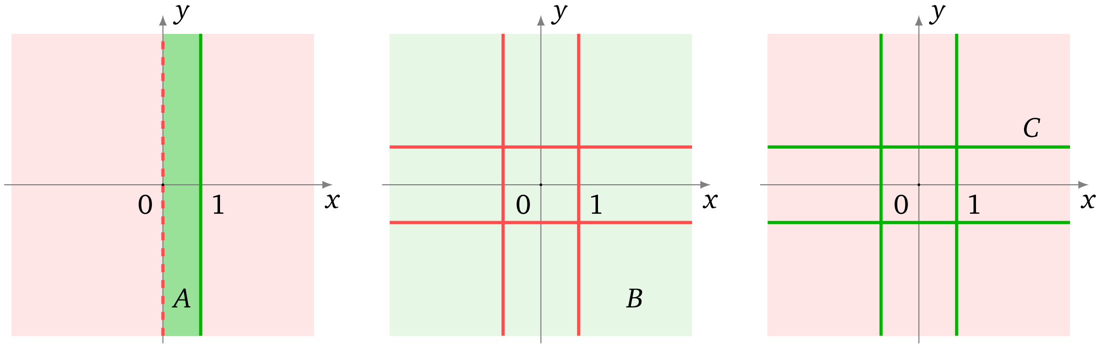
2 Ouverts et fermés

Exercice 4 – Terminologie
Représenter graphiquement les parties suivantes de $\mathbb{R}^2$ et dire pour chacune d'elle si c'est un ouvert, un fermé, ou ni l'un ni l'autre. Déterminer leur adhérence et leur intérieur.

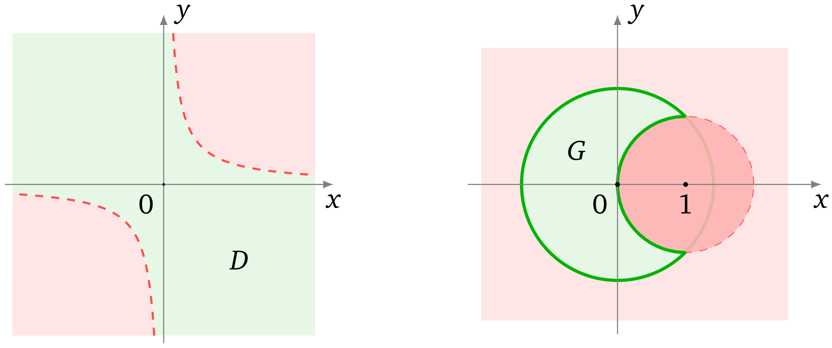
1. $A = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,,\, 0 < x \leqslant 1\}$
2. $B = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,,\, |x| \neq 1 \text{ et } |y| \neq 1\}$
3. $C = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,,\, |x| = 1 \text{ ou } |y| = 1\}$
4. $D = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,,\, 1 - xy > 0\}$
5. $E = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,,\, 3x + 4y = 2\}$
6. $F = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,,\, x^2 + y^2 = 1\}$
7. $G = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,,\, x^2 + y^2 \leqslant 2\} \setminus \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,,\, (x-1)^2 + y^2 < 1\}$
8. $H = \bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} \{1/n\} \times [0,1]$

Correction 4 –
On peut utiliser le résultat suivant : les seuls ensembles à la fois ouvert et fermé de $\mathbb{R}^2$ sont l'ensemble vide et $\mathbb{R}^2$. Donc par exemple, si un ensemble autre que $\varnothing$ et $\mathbb{R}^2$ est ouvert, il n'est pas fermé.

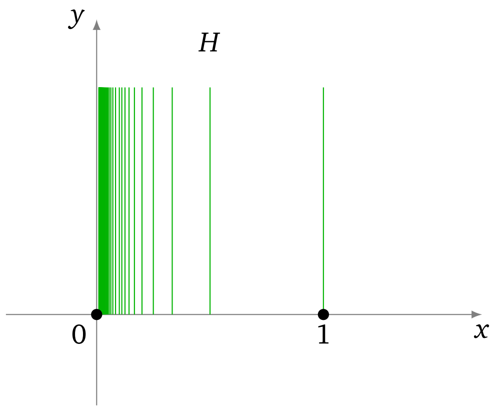
1. $A = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,,\, 0 < x \leqslant 1\}$.
   A est une bande verticale, avec son bord inclus à droite mais pas à gauche.
   A n'est pas ouvert (à cause de l'inégalité large), ni fermé (à cause de l'inégalité stricte). L'adhérence est $\bar{A} = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,,\, 0 \leqslant x \leqslant 1\}$ et l'intérieur est $\mathring{A} = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,,\, 0 < x < 1\}$.



2. $B = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,,\, |x| \neq 1 \text{ et } |y| \neq 1\}$.
   B est tout $\mathbb{R}^2$ privé de deux droites verticales et deux droites horizontales.
   B est ouvert, car on peut par exemple réécrire $x \neq 1 \iff (x < 1 \text{ ou } x > 1)$. Comme B est ouvert $\mathring{B} = B$. B n'est pas fermé. Son adhérence est $\mathbb{R}^2$ tout entier : $\bar{B} = \mathbb{R}^2$.
3. $C = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,,\, |x| = 1 \text{ ou } |y| = 1\}$.
   C est le complémentaire de B : $C = \mathbb{R}^2 \setminus B$. Il est composé de quatre droites.
   Comme B est ouvert, C est fermé. Ainsi $\bar{C} = C$. Comme B n'est pas ouvert, C n'est pas fermé. L'intérieur de C est vide : $\mathring{C} = \varnothing$.
4. $D = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,,\, 1 - xy > 0\}$.
   D est un ensemble de points bordé par l'hyperbole $xy = 1$. On détermine de quel côté sont les points de D en testant des points particuliers (par exemple $(0,0)\in D$, car $(0,0)$ vérifie $1 - xy > 0$).
   D est ouvert, $\mathring{D} = D$. D n'est pas fermé, $\bar{D} = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,,\, 1 - xy \geqslant 0\}$.



5. $E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \text{ , } 3x + 4y = 2\}$.
   E est une droite du plan. C'est un ensemble fermé, pas ouvert. $\bar{E} = E$, $\mathring{E} = \varnothing$.
6. $F = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \text{ , } x^2 + y^2 = 1\}$.
   F est un cercle. C'est un ensemble fermé, pas ouvert. $\bar{F} = F$, $\mathring{F} = \varnothing$.
7. $G = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \text{ , } x^2 + y^2 \leqslant 2\} \setminus \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \text{ , } (x-1)^2 + y^2 < 1\}$.
   G est un disque, privé d'un autre disque. Notons $G_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \text{ , } x^2 + y^2 \leqslant 2\}$, c'est un disque fermé. Notons $G_2 = \mathbb{R}^2 \setminus \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \text{ , } (x-1)^2 + y^2 < 1\}$, c'est un fermé en tant que complément d'un disque ouvert. $G = G_1 \cap G_2$ est un fermé en tant qu'intersection de deux fermés. $\bar{G} = G$. G n'est pas un ouvert. Son intérieur est :
   $$\mathring{G} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \text{ , } x^2 + y^2 < 2\} \setminus \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \text{ , } (x-1)^2 + y^2 \leqslant 1\}.$$
8. $H = \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} \{1/n\} \times [0,1]$.
   H est une union infinie de segments verticaux, un peu comme un peigne, dont les dents seraient de plus en plus proches en se rapprochant de l'origine.

   Ce n'est pas un ouvert (car par exemple une dent est déjà un segment vertical fermé). Ce n'est pas non plus un fermé : en effet soit $x_n = (\frac{1}{n}, 0)$, la suite $(x_n)_{n \geqslant 1}$ est une suite d'éléments de G et tend vers $(0,0) \notin G$. Ainsi par la caractérisation d'un fermé par les suites, G n'est pas fermé.
   L'adhérence de G est $\bar{G} = G \cup (\{0\} \times [0,1])$, c'est-à-dire qu'on rajoute une dent au-dessus de l'origine.
   L'intérieur de G est vide.

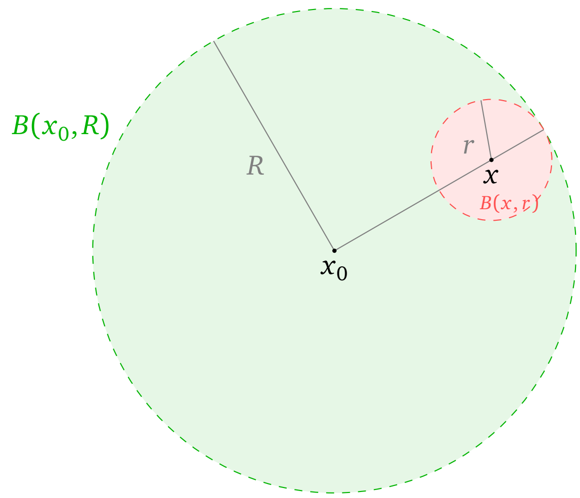
Exercice 5 – Une boule ouverte est un ouvert !

1. Montrer qu'une boule ouverte est un ensemble ouvert.
2. Montrer qu'une boule fermée est un ensemble fermé.
3. Montrer qu'une boule (ouverte ou fermée) de $\mathbb{R}^n$ est un convexe. (Un ensemble E est *convexe* si $A, B \in E$ implique $[AB] \subset E$, où $[AB] = \{(1-t)A + tB \mid t \in [0,1]\}$.)

Indications 5 –
Pour montrer qu'une boule ouverte est un ouvert, pour chaque point x de la boule ouverte il faut trouver une petit boule centrée en x complètement contenue dans la grande boule.

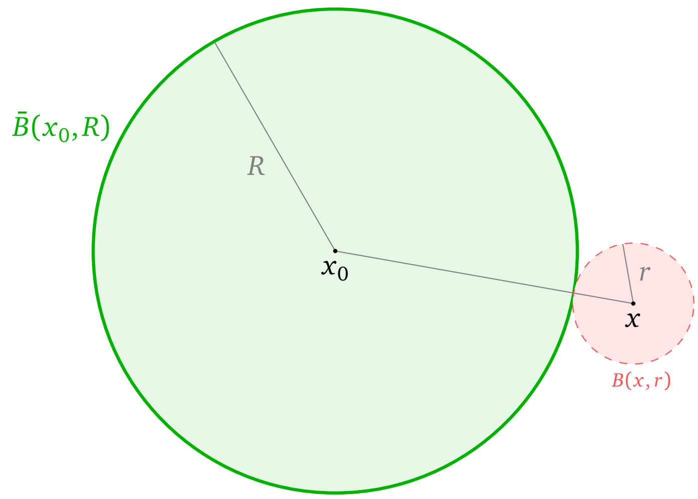
Correction 5 –
Il faut d'abord se convaincre qu'il y a bien quelque chose à prouver ! Ce n'est pas parce qu'un objet est appelé « boule ouverte » que cela en fait par définition un ensemble ouvert. Il faut montrer que c'est le cas afin de justifier que la terminologie est correcte.

1. Soit $B(x_0,R) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x - x_0\| < R\}$ une boule ouverte. Soit $x \in B(x_0,R)$. Pour montrer que $B(x_0,R)$ est un ouvert, il faut trouver $r > 0$ tel que $B(x,r) \subset B(x_0,R)$.
   La distance de x à x_0 est $\|x - x_0\|$ (et est $< R$). La distance entre x et le bord de la boule est $r = R - \|x - x_0\| > 0$.

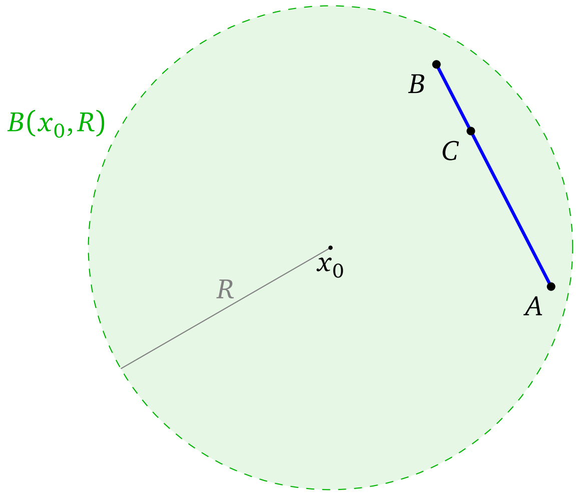
   Montrons que ce r convient, c'est-à-dire $B(x,r) \subset B(x_0,R)$. Soit $y \in B(x,r)$. Alors
   $$\|y - x_0\| = \|y - x + x - x_0\| \leqslant \|y - x\| + \|x - x_0\| < r + \|x - x_0\| = R.$$
   Donc $\|y - x_0\| < R$ ce qui prouve $y \in B(x_0,R)$. Ainsi une boule ouverte est bien un ouvert.

2. Soit $\bar{B}(x_0,R) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x - x_0\| \leqslant R\}$ une boule fermée. Pour montrer que $\bar{B}(x_0,R)$, il s'agit par définition de montrer $\mathbb{R}^n \setminus \bar{B}(x_0,R)$ est un ouvert.
   Soit $x \notin \bar{B}(x_0,R)$, c'est-à-dire $\|x - x_0\| > R$. Notons $r = \|x - x_0\| - R$.

   Montrons que $B(x,r) \subset \mathbb{R}^n \setminus \bar{B}(x_0,R)$. Soit $y \in B(x,r)$:
   $$\|x - x_0\| = \|(x - y) + (y - x_0)\| \leqslant \|x - y\| + \|y - x_0\|.$$
   Ainsi
   $$\|y - x_0\| \geqslant \|x - x_0\| - \|x - y\| > \|x - x_0\| - r = R.$$
   Comme $\|y - x_0\| > R$ alors $y \notin \bar{B}(x_0,R)$. Ainsi une boule fermée est un fermé.

3. Soient $A, B \in B(x_0, R)$. Soit $C = (1-t)A + tB$ avec $t \in [0,1]$. Lorsque t parcourt $[0,1]$, C parcourt le segment $[A, B]$.



On utilise deux fois le fait que $(1-t)+t=1$:

$$\begin{aligned}\|C - x_0\| &= \|(1-t)A + tB - (1-t+t)x_0)\| \\ &= \|(1-t)(A-x_0) + t(B-x_0)\| \\ &\leqslant |1-t| \cdot \|A - x_0\| + |t| \cdot \|B - x_0\| \\ &\leqslant (1-t)\|A-x_0\| + t\|B-x_0\| \\ &< (1-t)R + tR = R.\end{aligned}$$

Ainsi $C \in B(x_0, R)$.

Exercice 6 – Union et intersection d'ouverts

1. Montrer que toute union d'ensembles ouverts est un ensemble ouvert.
2. Montrer que toute intersection finie d'ensembles ouverts est un ensemble ouvert. Que peut-on dire des intersections infinies d'ensembles ouverts ?
3. Soient A et B deux parties de $\mathbb{R}^n$. On pose $A+B = \{z \in \mathbb{R}^n \mid \exists x \in A, \exists y \in B, z = x+y\}$. Montrer que si A est ouvert, $A+B$ est ouvert. (Commencer par le cas où B est un singleton.)

Correction 6 – 1. Soit $(O_i)_{i \in I}$ une famille d'ouverts indexée sur un ensemble I éventuellement infini. Montrons que $O = \bigcup_{i \in I} O_i$ est encore un ensemble ouvert.
Soit $x \in O$, il existe $i \in I$ tel que $x \in O_i$. Comme O_i est un ouvert, il existe $r > 0$ tel que $B(x, r) \subset O_i$, mais alors on a aussi $B(x, r) \subset O$. Conclusion : O est un ouvert.

2. (a) Soit $(O_i)_{i \in I}$ une famille d'ouverts indexée sur un ensemble I *fini*. Montrons que $O = \bigcap_{i \in I} O_i$ est encore un ensemble ouvert. Soit $x \in O$, alors pour tout $i \in I$, $x \in O_i$. Comme chaque O_i est un ouvert, il existe $r_i > 0$ tel que $B(x, r_i) \subset O_i$. Notons $r = \min_{i \in I} r_i$, comme I est fini, $r > 0$ et $B(x, r) \subset B(x, r_i) \subset O_i$ quel que soit i. Ainsi $B(x, r) \subset O$. Conclusion : O est un ouvert.
   (b) Notons $I_n =]-\frac{1}{n}, 1+\frac{1}{n}[$ des intervalles ouverts pour $n \in \mathbb{N}^*$. Alors $\bigcap_{n \geqslant 1} I_n = [0,1]$ est un intervalle fermé. Ainsi une intersection quelconque d'ouverts n'est pas toujours un ouvert.
3. (a) Cas $A + \{b_0\}$ avec A ouvert.
   Soit $x \in A + \{b_0\}$. Il existe $a \in A$ tel que $x = a + b_0$. Comme A est ouvert, il existe $r > 0$ tel que $B(a, r) \subset A$. Mais comme $B(a + b_0, r) = B(a, r) + \{b_0\}$ (faire un dessin) alors $B(a + b_0, r) \subset A + \{b_0\}$. Conclusion : $A + \{b_0\}$ est un ouvert.
   (b) Cas $A + B$ avec A ouvert.
   Soit $x = a + b \in A + B$. On a vu que $A + \{b\}$ est ouvert, donc il existe $r > 0$ tel que $B(x, r) \subset A + \{b\} \subset A + B$. Donc $A + B$ est un ouvert.

On retient de cet exercice :

— Une union quelconque d'ouverts est un ouvert.
— Une intersection finie d'ouverts est un ouvert.

Et on montrerait de même (attention aux changements) :
— Une intersection quelconque de fermés est un fermé.
— Une union finie de fermés est un fermé.

Exercice 7 – Frontière
Soit A une partie d'un espace vectoriel normé E. On rappelle que la *frontière* de A est l'ensemble $\text{Fr}(A) = \bar{A} \backslash \mathring{A}$. Montrer que :

1. $\text{Fr}(A) = \{x \in E \mid \forall \epsilon > 0, B(x, \epsilon) \cap A \neq \varnothing \text{ et } B(x, \epsilon) \cap (E \setminus A) \neq \varnothing\}$
2. $\text{Fr}(A) = \text{Fr}(E \setminus A)$
3. A est fermé si et seulement si $\text{Fr}(A)$ est inclus dans A.
4. A est ouvert si et seulement si $\text{Fr}(A) \cap A = \varnothing$.

Indications 7 –
1. Utiliser les définitions de ouverts et fermés.
2. Utiliser la question précédente.
3. Utiliser la question précédente.
4. Utiliser la question précédente.

Correction 7 –
1. Remarques générales :
   — $x \in \bar{A} \iff \forall \epsilon > 0,\ B(x, \epsilon) \cap A \neq \varnothing$.
   En effet, par la caractérisation de l'adhérence par les suites, $x \in \bar{A}$ si et seulement si, il existe une suite (x_n), d'éléments de A, telle que $x_n \to x$. En termes de boules cela se traduit par l'équivalence annoncée.
   — $x \in \mathring{A} \iff \exists \epsilon > 0,\ B(x, \epsilon) \subset A$.
   Cette seconde remarque se traduit en $x \notin \mathring{A} \iff \forall \epsilon > 0, B(x, \epsilon) \not\subset A \iff \forall \epsilon > 0, B(x, \epsilon) \cap (E \setminus A) \neq \varnothing$.

   La formule à montrer est la combinaison de ces deux remarques.
2. On sait que le complémentaire d'un complémentaire est l'ensemble initial : $E \setminus (E \setminus A) = A$. Donc si on applique la première question à $\text{Fr}(E \setminus A)$ on trouve :
$$\text{Fr}(E \setminus A) = \{x \in E \mid \forall \epsilon > 0, B(x, \epsilon) \cap (E \setminus A) \neq \varnothing \text{ et } B(x, \epsilon) \cap A \neq \varnothing\} = \text{Fr}(A).$$
3. De façon générale on sait que $A \subset \bar{A}$ et aussi que : A fermé $\iff A = \bar{A}$.
   Supposons A fermé, alors $A = \bar{A}$, donc $\text{Fr}(A) = A \setminus \mathring{A}$; en particulier $\text{Fr}(A) \subset A$.
   Supposons $\text{Fr}(A) \subset A$, alors $\bar{A} \setminus \mathring{A} \subset A$. Mais on a toujours $\mathring{A} \subset A$ donc $\bar{A} \subset A$. L'autre inclusion étant toujours vraie, alors $\bar{A} = A$, donc A est fermé.
4. $$\begin{aligned} A \text{ ouvert} &\iff E \setminus A \text{ fermé} \\ &\iff \text{Fr}(E \setminus A) \subset E \setminus A \text{ (d'après la question précédente)} \\ &\iff \text{Fr}(A) \subset E \setminus A \text{ (d'après la deuxième question)} \\ &\iff \text{Fr}(A) \cap A = \varnothing. \end{aligned}$$

3 Ensembles compacts

Exercice 8 – Compact ?
Dans $\mathbb{R}^2$ euclidien, les ensembles suivants sont-ils compacts ?

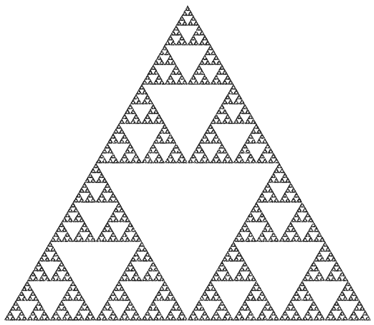
1. $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{1}{2} \leqslant \|(x, y)\| \leqslant 2 \text{ et } xy = 1\}$.
2. $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 < \|(x, y)\| \leqslant 2 \text{ et } y = \frac{1}{2}\}$.
3. $C = \{(n, \cos n) \in \mathbb{R}^2 \mid n \in \mathbb{N}\}$.

Correction 8 – 1. A est l'intersection de deux fermés $A_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{1}{2} \leqslant \|(x,y)\| \leqslant 2\}$ et $A_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy = 1\}$. Il est clair que A_2 est borné (car contenu dans la boule euclidienne de rayon 2). Ainsi A est une partie fermée et bornée, c'est donc un ensemble compact de $\mathbb{R}^2$.

2. B n'est compact car B n'est pas fermé, c'est l'union de deux segments du type $]a,b]$.

3. C n'est pas un ensemble borné car $\|(n,\cos n)\| \to +\infty$ lorsque $n \to +\infty$, donc C n'est pas un ensemble compact.

Exercice 9 – Triangle de Sierpinski



1. Soit $(C_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite décroissante (c'est-à-dire $C_{k+1} \subset C_k$) de compacts non vides de $\mathbb{R}^n$. Montrer que $C = \bigcap_k C_k$ est un ensemble compact *non vide*.

2. Soit T_0 la zone triangulaire de $\mathbb{R}^2$ de sommets $(0,0)$, $(1,0)$, $(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$. Soient les trois transformations affines suivantes :

$$f_1\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \qquad f_2\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\0\end{pmatrix} \qquad f_3\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\frac{1}{4}\\\frac{\sqrt{3}}{4}\end{pmatrix}$$

On note $T_{n+1} = f_1(T_n) \cup f_2(T_n) \cup f_3(T_n)$.

(a) Représenter T_0, T_1, T_2.

(b) Montrer $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite décroissante de compacts. En déduire que le *triangle de Sierpinski* $T = \bigcap_n T_n$ est un ensemble compact non vide.

(c) Calculer l'aire de T_n. Quelle est l'aire de T ?

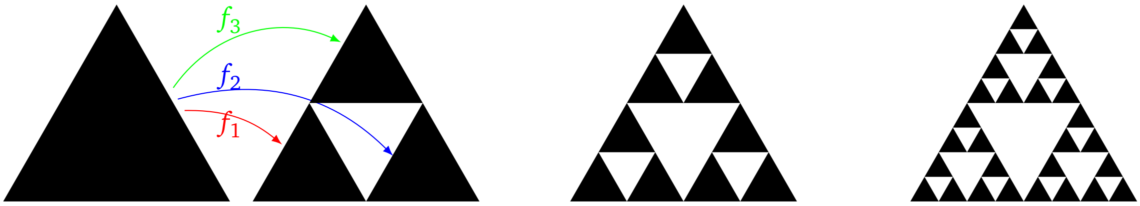
(d) Calculer le périmètre du bord de T_n. Quel est le périmètre du bord de T ?

Correction 9 – 1. Il faut d'abord comprendre que comme $C_{k+1} \subset C_k$ alors $\bigcap_{1\leqslant k\leqslant n} C_k = C_n$. Ainsi $C = \bigcap_k C_k$ est une façon de noter « $\lim_{k\to+\infty} C_k$ ».

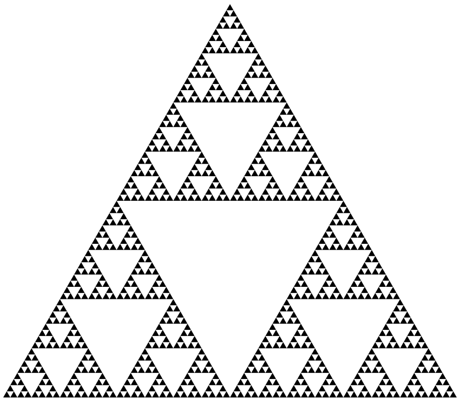
C_0 est par hypothèse un ensemble compact donc fermé et borné. Comme $C = \bigcap_{k\in\mathbb{N}} C_k \subset C_0$ alors C est un ensemble borné. En plus une intersection quelconque d'ensembles fermés est un fermé donc C est un fermé. Bilan : C est fermé et borné donc C est compact.

Il reste à montrer que C est non vide. Pour chaque k, choisissons $x_k \in C_k$. Comme $C_k \subset C$ alors $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est une suite d'éléments de C. Comme C est compact alors $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ admet une sous-suite $(x_{\phi(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ convergente. Notons x_∞ la limite de cette sous-suite. Comme C est fermé alors $x_\infty \in C$. Bilan : C est non vide.

2. (a) Géométriquement la fonction f_1 réalise une homothétie de facteur $\frac{1}{2}$. Ainsi le triangle T_0 est réduit d'un facteur 2 et placé en bas à gauche. Les fonctions f_2 et f_3 réduisent aussi du même facteur, et ajoutent en plus une translation afin de placer le triangle réduit en bas à droite ou en haut.



T_0 T_1 T_2 T_3



T_6

Ainsi on peut comprendre le passage de T_n à T_{n+1} de façon additive : on réduit T_n d'un facteur 2 et on en forme trois copies.

On peut aussi comprendre le passage de T_n à T_{n+1} de façon soustractive : pour chaque triangle (la pointe vers le haut) dans T_n on retire un petit triangle intérieur (la pointe en bas).

Énumération :

— T_n est composé de 3^n petits triangles,

— chaque petit triangle de T_n a une base de longueur de $\frac{1}{2^n}$.

(b) Chaque T_n est un ensemble compact (car borné et fermé en tant qu'union de petits triangles fermés). Par la construction soustractive, il est clair que $T_{n+1} \subset T_n$. Ainsi $(T_n)_{n\geqslant 0}$ est une suite décroissante de compacts non vides donc $T = \bigcap_n T_n$ est un compact non vide (voir la première question).

(c) Aire de T_n. Chaque petit triangle de T_n est un triangle équilatéral de base $\frac{1}{2^n}$ et donc de hauteur $\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{2^n}$; son aire est $\frac{\text{base}\times\text{hauteur}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4}\left(\frac{1}{2^n}\right)^2$. Ainsi l'aire totale des 3^n triangles de T_n est $\mathscr{A}_n = \frac{\sqrt{3}}{4}\frac{3^n}{4^n}$. L'aire de T est la limite de $\mathscr{A}_n$ lorsque $n \to +\infty$, c'est donc 0.

(d) Périmètre de T_n. Chaque petit triangle de T_n a un périmètre de $3\frac{1}{2^n}$. Le périmètre total de T_n est donc $\mathscr{L}_n = 3\frac{3^n}{2^n}$. Lorsque $n \to +\infty$, $\mathscr{L}_n \to +\infty$. Donc T a un périmètre infini.

Conclusion : T est un objet géométrique d'aire nulle mais de longueur infinie !

Exercice 10 – Théorèmes de point fixe

1. Soit $I = [a, b]$ un intervalle compact de $\mathbb{R}$. Montrer que toute fonction continue $f : I \to I$ admet au moins un point fixe.
2. Soit C un ensemble compact de $\mathbb{R}^n$. Soit $f : C \to C$ une application *quasi-contractante*, c'est-à-dire :

$$\text{pour tout } x, y \in C, x \neq y \qquad \|f(x) - f(y)\| < \|x - y\|.$$

Montrer que f admet un unique point fixe. (Indication : étudier la fonction $\phi(x) = \|f(x) - x\|$.)

Indications 10 – 1. Considérer $\psi(x) = f(x) - x$, $\psi(a)$ et $\psi(b)$.

2. Une fonction continue sur un compact...

Correction 10 – 1. Soit $\psi(x) = f(x) - x$. La fonction ψ est continue car f est continue. D'une part $\psi(a) = f(a) - a \geqslant 0$ car $f(a) \in [a, b]$ et d'autre part $\psi(b) = f(b) - b \leqslant 0$ car $f(b) \in [a, b]$. Par le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $c \in [a, b]$ tel que $\psi(c) = 0$. Pour ce c on a $f(c) - c = 0$, soit $f(c) = c$.

2. Unicité. Si f admettait deux points fixes distincts c et d, on aurait $\|c - d\| = \|f(c) - f(d)\| < \|c - d\|$, ce qui est impossible.

   Existence. La fonction $\phi(x) = \|f(x) - x\|$ est continue de C dans $\mathbb{R}^+$ et C est un ensemble compact par hypothèse. En vertu du théorème des valeurs extrêmes, elle atteint son minimum en un point c. Supposons par l'absurde $\phi(c) > 0$, c'est-à-dire $c \neq f(c)$. On aurait $\phi(f(c)) = \|(f \circ f)(c) - f(c)\| < \|f(c) - c\| = \phi(c)$, contredisant la minimalité de $\phi(c)$. Conclusion : un tel c est bien un minimum pour ϕ.

Exercice 11 – Point de Fermat

Soit A, B, C trois points du plan. Démontrer qu'il existe un point M inclus dans le triangle ABC pour lequel la somme des distances $MA + MB + MC$ est minimale.

Indications 11 –

On demande de montrer que ce point réalisant le minimum existe, on ne demande pas de trouver sa position.

Correction 11 –

Notons $\mathscr{T}$ les points du triangle ABC (c'est-à-dire les points intérieurs au triangle et les points du bord du triangle). Soit $\phi : \mathscr{T} \to \mathbb{R}$ la fonction qui à un point M du triangle associe la distance aux trois sommets :

$$\phi(M) = MA + MB + MC.$$

Une fonction distance, comme $M \mapsto MA = \|MA\|$, est une fonction continue, car c'est la valeur de la norme (euclidienne). Ainsi ϕ est une fonction continue. En plus $\mathscr{T}$ est un compact de $\mathbb{R}^2$ (car c'est un ensemble fermé et borné). Par le théorème des valeurs extrêmes, ϕ est bornée et atteint ses bornes. En particulier, il existe un point $F \in \mathscr{T}$ tel que $FA + FB + FC$ soit minimal.
Ce point F s'appelle le point de Fermat. Il existe une construction géométrique de ce point.

Corrections : Arnaud Bodin. Relecture : Axel Renard.