MISE EN ROUTE

Exercice 1 – Famille de cubiques
Soit la fonction $f_k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, qui dépend d'un paramètre $k \in \mathbb{R}$, définie par :

$$f_k(x) = x^3 + x^2 - kx + 1$$

1. Calculer la dérivée de f_k et résoudre $f_k'(x) = 0$.
2. En déduire les variations de f_k en fonction du paramètre k. En particulier déterminer où sont atteints les minimums et maximums locaux de f_k. Représenter les différents types de graphes de f_k que l'on peut obtenir.
3. Calculer l'équation de la tangente au graphe de f_k en $x = 1$.

Indications 1 –
Discuter selon les valeurs de k par rapport à $-\frac{1}{3}$.

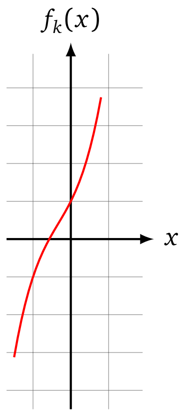
Correction 1 – 1. $f_k'(x) = 3x^2 + 2x - k$. Pour k fixé, résolvons l'équation $3x^2 + 2x - k = 0$, d'inconnue x. C'est une équation du second degré de discriminant $\Delta = 4(3k + 1)$.
— Si $k < -\frac{1}{3}$, $\Delta < 0$ et alors f_k' ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$.
— Si $k = -\frac{1}{3}$, $\Delta = 0$ et alors $f_k'(x) = 0$ admet une solution (double) $x_0 = -\frac{1}{3}$.
— Si $k > -\frac{1}{3}$, $\Delta > 0$, alors $f_k'(x) = 0$ admet deux solutions :

$$x_1 = \frac{-1 - \sqrt{3k+1}}{2} \qquad x_2 = \frac{-1 + \sqrt{3k+1}}{2}.$$

2. Remarquons déjà que, quel que soit $k \in \mathbb{R}$, $\lim_{-\infty} f_k = -\infty$ et $\lim_{+\infty} f_k = +\infty$.
— Si $k < -\frac{1}{3}$, alors en fait $f_k'(x) > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Ainsi f_k est une fonction strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Cas $k < -\frac{1}{3}$.

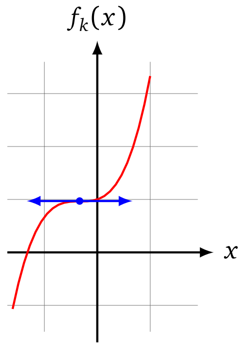
x	$-\infty$	$+\infty$
$f_k'(x)$	+	
$f_k(x)$	$-\infty$ $\nearrow$	$+\infty$



— Si $k = -\frac{1}{3}$, $\Delta = 0$ et alors $f_k'(x) = 0$ admet une solution (double) $x_0 = -\frac{1}{3}$. Alors f_k est aussi strictement croissante sur $\mathbb{R}$, mais avec un point d'inflexion en $x_0 = 0$, où le graphe de f admet une tangente horizontale. La valeur x_0 n'est ni un maximum local, ni un minimum local.

Cas $k = -\frac{1}{3}$**.**

x	$-\infty$		x_0		$+\infty$
$f_k'(x)$		$+$	0	$+$	
$f_k(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$f_k(x_0)$	$\nearrow$	$+\infty$



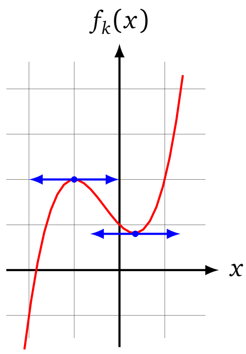
— Si $k > -\frac{1}{3}$, $\Delta > 0$, alors $f_k'(x) = 0$ admet deux solutions :

$$x_1 = \frac{-1-\sqrt{3k+1}}{2} \qquad x_2 = \frac{-1+\sqrt{3k+1}}{2}.$$

$f_k'(x)$ s'annule est x_1 et x_2 ; elle est positive sur $]-\infty, x_1]$ et $[x_2, +\infty[$; elle est négative sur $[x_1, x_2]$. Elle est donc croissante, puis décroissante, puis de nouveau croissante. Elle admet un maximum local en x_1 (de valeur $f_k(x_1)$) et un minimum local en x_2 (de valeur $f_k(x_2)$).

Cas $k > -\frac{1}{3}$**.**

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
$f_k'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f_k(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$f_k(x_1)$	$\searrow$	$f_k(x_2)$	$\nearrow$	$+\infty$



3. La formule générale d'une tangente au graphe de f au point $(x_0, f(x_0))$ est :

$$y = (x - x_0)f'(x_0) + f(x_0).$$

Avec $x_0 = 1$, on a ici $f_k(1) = 3 - k$ et $f_k'(1) = 5 - k$ et on obtient ainsi l'équation :

$$y = (5 - k)x - 2.$$

Exercice 2 – Dérivées

Soient $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux fonctions dérivables. Soient $a, b \in \mathbb{R}$ et $k \in \mathbb{N}$ des constantes. Calculer les dérivées par rapport à la variable x des expressions suivantes.

1. $\ln(f(x)/g(x))$ (on suppose $f > 0$ et $g > 0$).
2. $f(x^2)$, $f(ax+b)$, $f^k(x)$, $f^2(e^x)$.
3. $f(g^2(x))$, $f^2(g(x))$.

Indications 2 –

Il s'agit d'appliquer la formule de la dérivée d'une composition $f \circ g$:

$$(f \circ g)'(x) = f'\big(g(x)\big) \cdot g'(x)$$

Correction 2 –

Rappelons la formule de la dérivée d'une composition $f \circ g$:

$$(f \circ g)'(x) = f'\big(g(x)\big) \cdot g'(x)$$

1. Notons $F_1(x) = \ln(f(x)/g(x))$. On rappelle que la dérivée de $\ln(u(x))$ est $\frac{u'(x)}{u(x)}$. Il est plus simple ici de commencer par utiliser l'identité $\ln(a/b) = \ln(a) - \ln(b)$, donc $F_1(x) = \ln(f(x)) - \ln(g(x))$ et ainsi :
$$F_1'(x) = \frac{f'(x)}{f(x)} - \frac{g'(x)}{g(x)}.$$
2. — Soit $F_2(x) = f(x^2)$. Il s'agit de la composition $f \circ g(x)$ où $g(x) = x^2$ (et donc $g'(x) = 2x$). Ainsi, $F_2'(x) = 2xf'(x^2)$.
   — Soit $F_3(x) = f(ax+b)$. Il s'agit de de la composition $f \circ g(x)$ où $g(x) = ax + b$ (et donc $g'(x) = a$). Ainsi $F_3'(x) = af'(ax+b)$.
   — Soit $F_4(x) = f^k(x) = \big(f(x)\big)^k$. Il s'agit de de la composition $u \circ v(x)$ où $u(x) = x^k$ (et donc $u'(x) = kx^{k-1}$) et $v(x) = f(x)$. Ainsi $F_4'(x) = kf'(x)f^{k-1}(x)$.
   — Soit $F_5(x) = f^2(e^x)$. Il s'agit de de la composition $u \circ v \circ w$ où $u(x) = x^2$ (et donc $u'(x) = 2x$) et $v(x) = f(x)$ et $w(x) = e^x$. On dérive d'abord $v \circ w$: $\big(f(e^x)\big)' = e^x f'(e^x)$, puis $u \circ (v \circ w)$. Ainsi $F_5'(x) = 2e^x f'(e^x) f(e^x)$.
3. On procède de même pour $F_6(x) = f(g^2(x))$: $F_6'(x) = 2 \cdot g'(x) \cdot g(x) \cdot f'\big(g^2(x)\big)$. Et pour $F_7(x) = f^2(g(x))$: $F_7'(x) = 2 \cdot g'(x) \cdot f'(g(x)) \cdot f(g(x))$.

Exercice 3 – Trigonométrie hyperbolique

Le cosinus, sinus et tangente hyperboliques sont les fonctions définies par :
$$\operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \qquad \operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \qquad \operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}$$

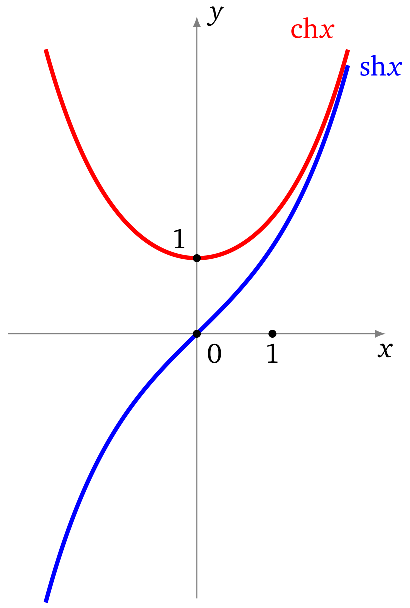
1. Montrer la relation $\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1$.
2. Prouver les formules d'addition :
$$\operatorname{ch}(a+b) = \operatorname{ch}(a)\operatorname{ch}(b) + \operatorname{sh}(a)\operatorname{sh}(b)$$
$$\operatorname{sh}(a+b) = \operatorname{sh}(a)\operatorname{ch}(b) + \operatorname{ch}(a)\operatorname{sh}(b)$$
$$\operatorname{th}(a+b) = \frac{\operatorname{th}(a) + \operatorname{th}(b)}{1 + \operatorname{th}(a)\operatorname{th}(b)}$$
3. Calculer les dérivées des trois fonctions ; étudier-les et tracer leur graphe.
4. Montrer que $x \mapsto \operatorname{sh} x$ définie une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On note $\operatorname{argsh}(x)$ sa bijection réciproque. En dérivant la relation $\operatorname{sh}(\operatorname{argsh}(x)) = x$, calculer la dérivée de $\operatorname{argsh}(x)$.
5. Calculer la dérivée de $f(x) = \ln\big(x + \sqrt{x^2+1}\big)$. En déduire une expression pour $\operatorname{argsh} x$.

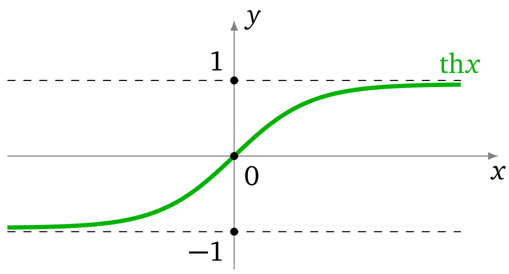
Correction 3 –

1.
$$\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = \frac{1}{4}\Big((e^x + e^{-x})^2 - (e^x - e^{-x})^2\Big) = \frac{1}{4}\Big((e^{2x} + 2 + e^{-2x}) - (e^{2x} - 2 + e^{-2x})\Big) = 1.$$

2.
$$4\Big(\operatorname{ch}(a)\operatorname{ch}(b) + \operatorname{sh}(a)\operatorname{sh}(b)\Big) = (e^a + e^{-a})(e^b + e^{-b}) + (e^a - e^{-a})(e^b - e^{-b}) = 2\left(e^{a+b} + e^{-a-b}\right) = 4\operatorname{ch}(a+b)$$
   On procède de même pour $\operatorname{sh}(a+b)$.
$$\frac{\operatorname{th}(a) + \operatorname{th}(b)}{1 + \operatorname{th}(a)\operatorname{th}(b)} = \frac{\frac{\operatorname{sh} a}{\operatorname{ch} a} + \frac{\operatorname{sh} b}{\operatorname{ch} b}}{1 + \frac{\operatorname{sh} a}{\operatorname{ch} a}\frac{\operatorname{sh} b}{\operatorname{ch} b}} = \frac{\frac{\operatorname{sh} a}{\operatorname{ch} a} + \frac{\operatorname{sh} b}{\operatorname{ch} b}}{1 + \frac{\operatorname{sh} a}{\operatorname{ch} a}\frac{\operatorname{sh} b}{\operatorname{ch} b}} \times \frac{\operatorname{ch} a \operatorname{ch} b}{\operatorname{ch} a \operatorname{ch} b} = \frac{\operatorname{sh} a \operatorname{ch} b + \operatorname{sh} b \operatorname{ch} a}{\operatorname{ch} a \operatorname{ch} b + \operatorname{sh} a \operatorname{sh} b} = \frac{\operatorname{sh}(a+b)}{\operatorname{ch}(a+b)} = \operatorname{th}(a+b)$$

3. On a :
$$\mathrm{ch}'(x)=\mathrm{sh}(x) \qquad \mathrm{sh}'(x)=\mathrm{ch}(x) \qquad \mathrm{th}'(x)=\frac{1}{\mathrm{ch}^2(x)}=1-\mathrm{th}^2(x).$$
L'étude de ces fonctions ne posent pas de problèmes particuliers. Voici leurs graphes :





4. La fonction $x\mapsto \mathrm{sh}(x)$ est continue, $\lim_{-\infty}\mathrm{sh}(x)=-\infty$ et $\lim_{+\infty}\mathrm{sh}(x)=+\infty$. Comme $\mathrm{sh}'(x)=\mathrm{ch}(x)>0$ alors la fonction sinus hyperbolique est strictement croissante. Ainsi elle réalise une bijection de $]-\infty,+\infty[$ vers $]-\infty,+\infty[$.
Par définition d'une bijection réciproque on a $\mathrm{sh}(\operatorname{argsh} x)=x$ quel que soit $x\in\mathbb{R}$. On souhaite dériver cette identité : à droite on obtient 1 (la dérivée de x), alors qu'à gauche on applique la formule de la dérivée d'une composition. Ainsi :
$$\operatorname{argsh}'(x)\cdot \mathrm{sh}'(\operatorname{argsh} x)=1,$$
donc
$$\operatorname{argsh}'(x)\cdot \mathrm{ch}(\operatorname{argsh} x)=1.$$
Par ailleurs on sait que $\mathrm{ch}^2 u-\mathrm{sh}^2 u=1$, donc $\mathrm{ch}\, u=+\sqrt{1+\mathrm{sh}^2 u}$. On applique cette égalité avec $u=\operatorname{argsh} x$ et on utilise que $\mathrm{sh}(\operatorname{argsh} x)=x$ pour obtenir :
$$\operatorname{argsh}'(x)\cdot\sqrt{1+\mathrm{sh}^2(\operatorname{argsh} x)}=1.$$
Donc
$$\operatorname{argsh}'(x)\cdot\sqrt{1+x^2}=1$$
et ainsi
$$\operatorname{argsh}'(x)=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}.$$
5. La dérivée de $f(x)=\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$ est $f'(x)=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$. Ainsi $x\mapsto f(x)$ et $x\mapsto \operatorname{argsh}(x)$ ont la même dérivée. En plus ces deux fonctions prennent la même valeur en $x=0$: $f(0)=0$ et comme $\mathrm{sh}(0)=0$ alors on a aussi $\operatorname{argsh}(0)=0$. Ainsi $f(x)=\operatorname{argsh}(x)$ pour tout $x\in\mathbb{R}$:
$$\operatorname{argsh}(x)=\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right).$$

Exercice 4 – Encadrements

1. Montrer que $\forall t>0,\ \left(1+\frac{1}{t}\right)^t<e$. En déduire $\forall x,y>0,\ \left(1+\frac{x}{y}\right)^y<e^x$.
2. Montrer que : $\forall t>1,\ e<\left(1+\frac{1}{t-1}\right)^t$. En déduire $\forall x,y>0,\ e^x<\left(1+\frac{x}{y}\right)^{x+y}$.

Indications 4 –
Passer au logarithme et étudier une fonction quitte à dériver deux fois.

Correction 4 – 1. Par la croissance du logarithme, l'inégalité $\left(1+\frac{1}{t}\right)^t < e$ est équivalente à $t\ln\left(1+\frac{1}{t}\right) < 1$. Étudions la fonction $f(t) = t\ln\left(1+\frac{1}{t}\right)$ sur $]0,+\infty[$. Sa dérivée est $f'(t) = \ln\left(1+\frac{1}{t}\right) - \frac{1}{t+1}$. Il n'est pas clair de déterminer directement le signe de $f'(t)$, on dérive donc une seconde fois : $f''(t) = -\frac{1}{t(t+1)^2}$. Ainsi $f''(t) < 0$, donc f' est strictement décroissante sur $]0,+\infty[$.

Calculons la limite de $f'(t)$ en $+\infty$. On effectue un développement limité (avec $1/t \to 0$) : $f'(t) \sim \frac{1}{t} - \frac{1}{t+1} = \frac{1}{t(t+1)} \to 0$. Comme f' est strictement décroissante et tend vers 0, alors $f'(t) > 0$ pour tout $t \in]0,+\infty[$. Ainsi f est strictement croissante.

Calculons la limite de f en $+\infty$. $f(t) = t\ln\left(1+\frac{1}{t}\right) \sim t\cdot\frac{1}{t} \to 1$. Comme f est strictement croissante et tend vers 1 alors $f(t) < 1$ pour tout $t \in]0,+\infty[$. Ce qui prouve l'inégalité cherchée. En posant $t = \frac{y}{x}$, on obtient la seconde inégalité.

t	0	$+\infty$
$f''(t)$	$-$	
$f'(t)$	$\searrow$	0
$f(t)$	$\nearrow$	1

2. Il s'agit en fait de prouver l'inégalité $t\ln\left(1+\frac{1}{t-1}\right) > 1$. On étudie cette fois la fonction $g(t) = t\ln\left(1+\frac{1}{t-1}\right)$. L'étude est similaire : $g'(t) = \ln\left(1+\frac{1}{t-1}\right) - \frac{1}{t-1}$, $g''(t) = \frac{1}{t(t-1)^2}$. Par l'étude des variations et des limites, on prouve $g(t) > 1$ pour tout $t > 0$ et l'inégalité voulue. En posant $t = \frac{x+y}{x}$, on obtient la seconde inégalité.

Exercice 5 – Fonction expansive
Soit $f : [0,1] \to [0,1]$ telle que $\forall (x,y) \in [0,1]^2,\ |f(y)-f(x)| \geqslant |x-y|$. Montrer que $f = \mathrm{id}$ ou $f = 1-\mathrm{id}$.

Indications 5 –
Commencer par déterminer quelles sont les valeurs possibles pour $f(0)$ et $f(1)$.

Correction 5 –
— On a $0 \leqslant f(0) \leqslant 1$ et $0 \leqslant f(1) \leqslant 1$. Donc $|f(1)-f(0)| \leqslant 1$. Mais, par hypothèse, $|f(1)-f(0)| \geqslant 1$. Par suite, $|f(1)-f(0)| = 1$ et nécessairement, $(f(0), f(1)) = (0,1)$ ou $(f(0), f(1)) = (1,0)$.
— Supposons que $f(0) = 0$ et $f(1) = 1$ et montrons que $\forall x \in [0,1],\ f(x) = x$. Soit $x \in [0,1]$. On a $|f(x)-f(0)| \geqslant |x-0|$ ce qui fournit $f(x) \geqslant x$. On a aussi $|f(x)-f(1)| \geqslant |x-1|$ ce qui fournit $1-f(x) \geqslant 1-x$ et donc $f(x) \leqslant x$. Finalement, $\forall x \in [0,1],\ f(x) = x$ et $f = \mathrm{id}$.
— Si $f(0) = 1$ et $f(1) = 0$, posons pour $x \in [0,1]$, $g(x) = 1-f(x)$. Alors, $g(0) = 0$, $g(1) = 1$ puis, pour $x \in [0,1]$, $g(x) \in [0,1]$. Enfin,

$$\forall (x,y) \in [0,1]^2,\ |g(y)-g(x)| = |f(y)-f(x)| \geqslant |y-x|.$$

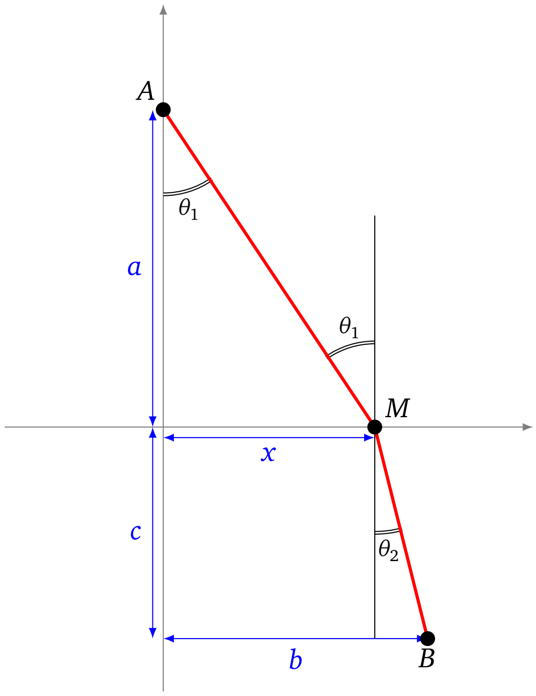
D'après l'étude du premier cas, $g = \mathrm{id}$ et donc $f = 1-\mathrm{id}$.
— Réciproquement, id et $1-\mathrm{id}$ sont bien solutions du problème.

Exercice 6 – Loi de réfraction
Soient dans $\mathbb{R}^2$: $A = (0,a)$, $B = (b,-c)$ et $M = (x,0)$ $(a,b,c > 0)$. Un rayon lumineux parcourt la ligne brisée AMB à la vitesse v_1 de A à M et v_2 de M à B. On note $\theta_1 = \mathrm{angle}(\vec{j}, \vec{MA})$ et $\theta_2 = \mathrm{angle}(-\vec{j}, \vec{MB})$.

1. Faire une figure.
2. Montrer que le temps de parcours est minimal lorsque $\frac{\sin\theta_1}{v_1} = \frac{\sin\theta_2}{v_2}$.

Indications 6 –
Le lien entre temps, distance et vitesse est $v = \frac{d}{t}$. Étudier ensuite la fonction $x \mapsto t(x)$ qui calcule le temps du trajet de A à B en passant par M.

Correction 6 –



Le temps parcouru est

$$t(x) = \frac{MA}{v_1} + \frac{MB}{v_2} = \frac{\sqrt{x^2+a^2}}{v_1} + \frac{\sqrt{(b-x)^2+c^2}}{v_2}.$$

On calcule :

$$t'(x) = \frac{x}{v_1\sqrt{x^2+a^2}} - \frac{b-x}{v_2\sqrt{(b-x)^2+c^2}}$$

Et on remarque que $\sin\theta_1 = x/MA$, $\sin\theta_2 = (b-x)/MB$, donc

$$t'(x) = \frac{\sin\theta_1}{v_1} - \frac{\sin\theta_2}{v_2}.$$

D'un point de vue de la physique, on sait qu'il existe un plus court chemin pour le trajet de la lumière. Pour x_0 associé à ce temps minimal, on a $t'(x_0) = 0$, c'est-à-dire

$$\frac{\sin\theta_1}{v_1} = \frac{\sin\theta_2}{v_2}.$$

D'un point de vue mathématique nous allons étudier la fonction $x \mapsto t(x)$ et montrer que le minimum existe et est unique. Calculons la dérivée seconde :

$$t''(x) = \frac{a^2}{v_1(x^2+a^2)^{3/2}} + \frac{c^2}{v_2((b-x)^2+c^2)^{3/2}}$$

Ainsi $t''(x) > 0$ quel que soit $x \geqslant 0$ donc $x \mapsto t'(x)$ est une fonction strictement croissante. Mais on a vu que la dérivée s'annule en x_0, qui est donc l'unique solution de $t'(x) = 0$. Ainsi $t'(x)$ est négatif avant x_0 et positif après. On détermine alors les variations de $x \mapsto t(x)$ (voir ci-dessous) : la fonction est décroissante avant x_0, puis croissante, elle admet donc un minimum en x_0.

x	0		x_0		$+\infty$
$t''(x)$			$+$		
$t'(x)$		$\nearrow$	0	$\nearrow$	
$t(x)$		$\searrow$	$t_{\min}$	$\nearrow$	$+\infty$

Corrections : Arnaud Bodin. Relecture : Axel Renard.