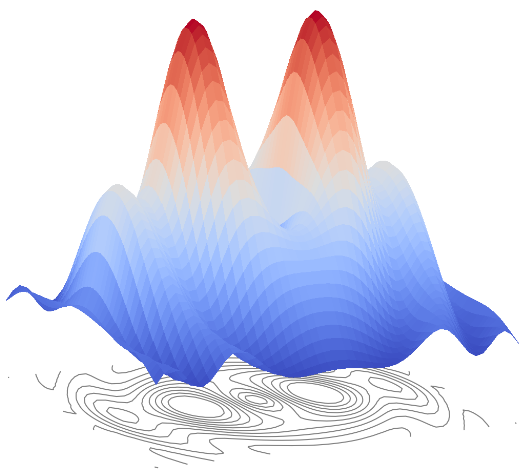
# Fonctions de plusieurs variables

## 1. Introduction

En première année, vous avez étudié les fonctions d'une variable : par exemple, si $t \mapsto f(t)$ représente l'évolution d'une population en fonction du temps, vous savez déterminer ses caractéristiques (croissance, maximum, limite...). Mais de nombreux phénomènes dépendent de plusieurs paramètres : par exemple, le volume d'un gaz dépend de la température et de la pression, ou bien l'altitude d'un point à la surface de la Terre dépend de la latitude et de la longitude. Le but de ce cours est de faire le même travail que pour les fonctions d'une variable : étudier la croissance, les maximums, les limites... Bien sûr, la situation est plus délicate, mais aussi plus intéressante, du fait qu'il y a plusieurs variables !



### 1.1. Que sont les fonctions de plusieurs variables ?

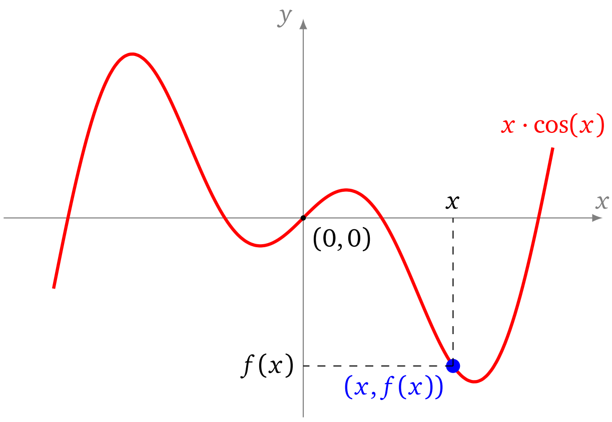
Dans ce chapitre, nous allons étudier les fonctions de plusieurs variables dans le cadre particulier de $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$, mais également dans le cadre général de $\mathbb{R}^n$. Ces fonctions seront donc de la forme

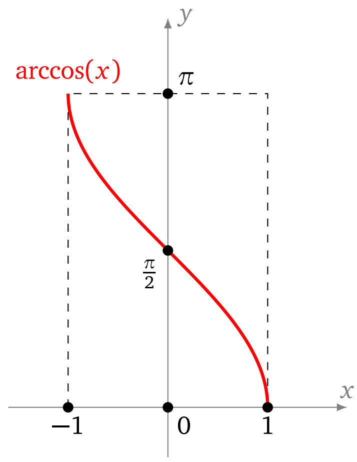
$$f : E \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R},$$

où $n \geqslant 1$ est un entier naturel.
Autrement dit, les éléments de l'ensemble de départ $E$ seront des $n$-uplets du type $(x_1, \dots, x_n)$ que l'on peut considérer comme des vecteurs, et les éléments de l'ensemble d'arrivée seront des réels.

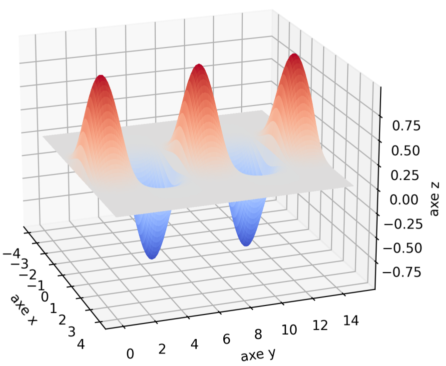
**Exemple 1.**

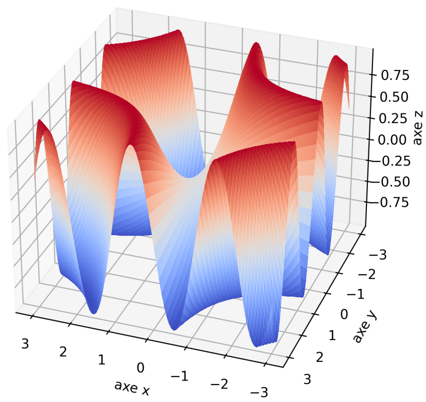
1. $n = 1$. $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ : c'est le cas le plus simple, $x \mapsto f(x)$, celui qui est connu depuis le lycée. Voici les graphes des fonctions $x \mapsto x \cdot \cos(x)$ et $x \mapsto \arccos(x)$ :




2. $n=2$. $f : E \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. On préfère noter les variables par $(x, y)$ (au lieu de $(x_1, x_2)$). Ces fonctions $(x, y) \mapsto f(x, y)$ seront notre principal sujet d'étude et sont représentées par des surfaces. À gauche, le graphe de la fonction $(x, y) \mapsto \sin(y)e^{-x^2}$. À droite, le graphe de la fonction $(x, y) \mapsto \sin(xy)$.




Dès que $n > 2$, il est assez difficile d'avoir une vision graphique.

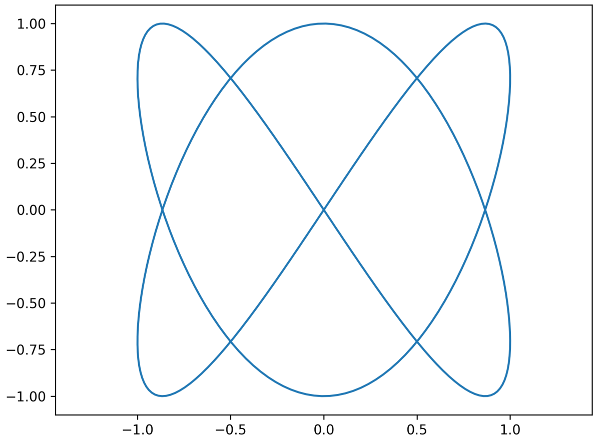
Nous allons aussi étudier des fonctions, dites fonctions vectorielles, dont l'ensemble d'arrivée n'est pas $\mathbb{R}$, mais $\mathbb{R}^p$, donc de la forme

$$f : E \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p,$$

où $n \geqslant 1$ et $p \geqslant 1$ sont des entiers naturels.
Dans ce cas, si $x = (x_1, \ldots, x_n)$ est un vecteur de $\mathbb{R}^n$, alors $f(x)$ est un vecteur de $\mathbb{R}^p$, du type $f(x) = (f_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, f_p(x_1, \ldots, x_n))$. Attention, dans la suite, $x$ désignera parfois le vecteur $x = (x_1, \ldots, x_n)$ et parfois $x$ désignera un seul réel (comme par exemple pour une fonction de deux variables $f(x, y)$).

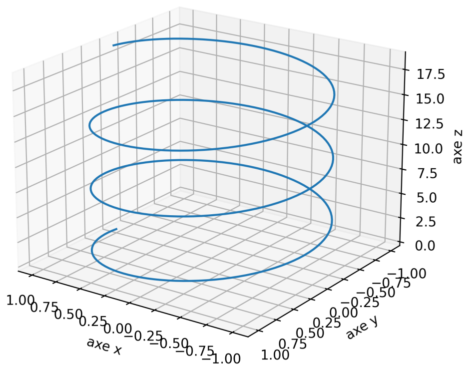
**Exemple 2.**

1. $n = 1$, $p = 2$. $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ est représentée par une courbe paramétrée du plan.
   Exemple : la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ définie par $t \mapsto (\sin(2t), \sin(3t))$. Cela correspond à la courbe paramétrée définie par $x(t) = \sin(2t)$ et $y(t) = \sin(3t)$.




On peut interpréter le dessin comme l'ensemble des positions $(x(t), y(t)) \in \mathbb{R}^2$ que prend une particule dans le plan en fonction du temps $t \in \mathbb{R}$.

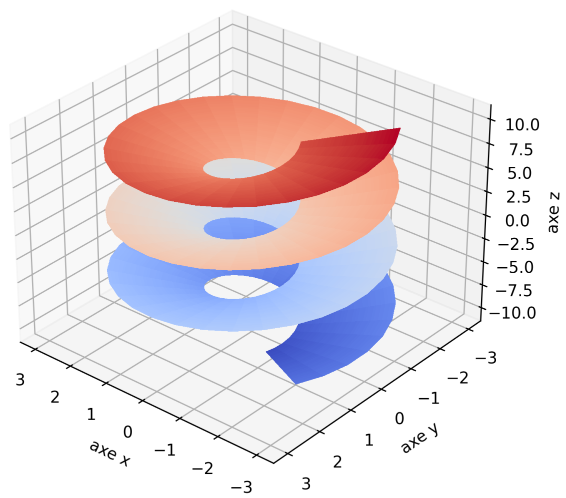
2. $n = 1$, $p = 3$. $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ est représentée par une courbe paramétrée de l'espace. Exemple : la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ définie par $t \mapsto (\cos t, \sin t, t)$. Cela correspond au mouvement dans l'espace d'une particule $(x(t), y(t), z(t))$, qui ici parcourt une hélice.



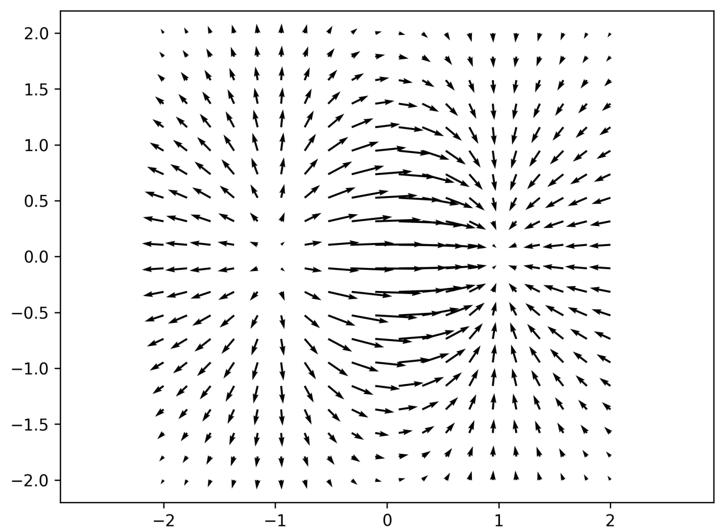

3. $n=2$, $p=3$. $f : E \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ : elles sont représentées par exemple par des surfaces paramétrées. Voici l'exemple de la fonction

$$(u,v) \mapsto \big((2+\sin v)\cos u, (2+\sin v)\sin u, u+\cos v\big).$$

Chaque paramètre $(u,v) \in \mathbb{R}^2$ correspond à un point $(x(u,v), y(u,v), z(u,v)) \in \mathbb{R}^3$ de la surface hélicoïdale.




4. $n = 2$, $p = 2$. $f : E \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ : elles sont représentées par exemple par des champs de vecteurs. À chaque point du plan $(x, y)$ on associe le vecteur $\vec{v} = f(x, y)$. (Sur la figure ci-dessous, seuls certains vecteurs sont représentés.)




Dans ce chapitre, nous étudions surtout les fonctions $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, et plus particulièrement les fonctions $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ ou $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$. Nous reviendrons plus tard sur les fonctions vectorielles $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$.

## 1.2. Topologie de $\mathbb{R}^n$ (rappels/compléments)

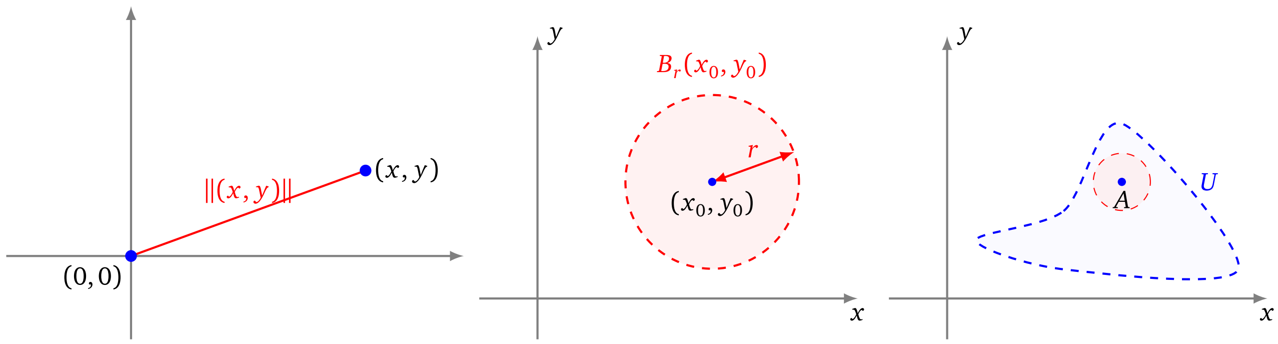
Voici quelques rappels de topologie dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$.

- Le *produit scalaire* usuel de $x = (x_1, \dots, x_n)$ et $y = (y_1, \dots, y_n)$, noté $\langle x \mid y \rangle$ (ou bien parfois $x \cdot y$), est défini par
$$\langle x \mid y \rangle = x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n.$$
- La *norme euclidienne* sur $\mathbb{R}^n$ est la norme associée à ce produit scalaire. Pour $x \in \mathbb{R}^n$, la norme euclidienne de $x$, notée $\|x\|$, est définie par
$$\|x\| = \sqrt{\langle x \mid x \rangle} = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}.$$
- La *distance* entre le point $A = (a_1, \dots, a_n)$ et le point $M = (x_1, \dots, x_n)$ est
$$\|M - A\| = \sqrt{(x_1 - a_1)^2 + \cdots + (x_n - a_n)^2}.$$

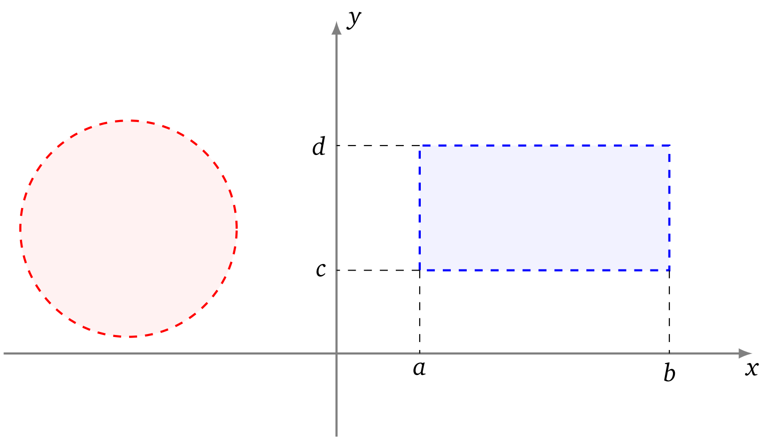
- La ***boule ouverte*** de centre $A = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ et de rayon $r > 0$, notée $B_r(A)$, est l'ensemble suivant :
$$B_r(A) = \{M \in \mathbb{R}^n \mid \|M - A\| < r\}.$$
- Soient $U$ une partie de $\mathbb{R}^n$ et $A \in U$. On dit que $U$ est un ***voisinage*** de $A$ si $U$ contient une boule ouverte centrée en $A$.
- On dit que $U$ est un ***ouvert*** de $\mathbb{R}^n$ si, pour tout point $A \in U$, $U$ contient une boule ouverte centrée en $A$.

Dans le cas de $\mathbb{R}^2$, on note plutôt les coordonnées d'un point par $(x, y)$. Alors :
- $\langle (x, y) \mid (x', y') \rangle = xx' + yy'$
- $\|(x, y)\| = \sqrt{x^2 + y^2}$
- $B_r(x_0, y_0) = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 < r^2\right\}$ (on parle de ***disque*** plutôt que de boule).

De gauche à droite : la norme euclidienne, un disque ouvert, un ouvert $U$.




Exemples :
- tout rectangle ouvert $]a, b[\times]c, d[$ est un ouvert de $\mathbb{R}^2$ (à droite sur la figure),
- tout disque ouvert de $\mathbb{R}^2$ est un ouvert de $\mathbb{R}^2$ (à gauche sur la figure).




# 2. Graphe

## 2.1. Fonctions

**Définition 1.**
Soit $E$ une partie de $\mathbb{R}^n$. Une ***fonction*** $f : E \to \mathbb{R}$ associe à tout $(x_1, \dots, x_n)$ de $E$ un seul nombre réel $f(x_1, \dots, x_n)$.

**Exemple 3.**

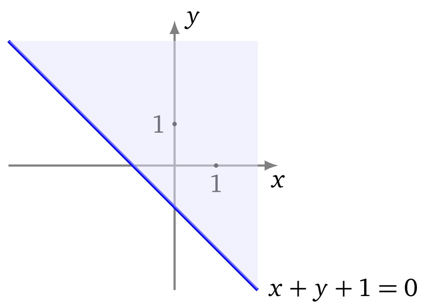
1. Distance d'un point à l'origine en fonction de ses coordonnées :
$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x, y) & \longmapsto & \sqrt{x^2 + y^2}. \end{array}$$

2. Aire d'un rectangle en fonction de sa longueur et sa largeur :
$$f \;:\; \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & xy. \end{array}$$
3. Aire d'un parallélépipède en fonction de ses trois dimensions :
$$f \;:\; \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y,z) & \mapsto & 2(xy+yz+xz). \end{array}$$

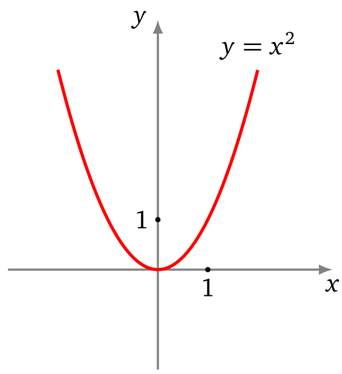
**Définition 2.**
Si on nous donne d'abord une expression pour $f(x_1,\dots,x_n)$, alors le ***domaine de définition*** de $f$ est le plus grand sous-ensemble $D_f \subset \mathbb{R}^n$ tel que, pour chaque $(x_1,\dots,x_n)$ de $D_f$, $f(x_1,\dots,x_n)$ soit bien définie. La fonction est alors $f : D_f \to \mathbb{R}$.

**Exemple 4.**

1. $f(x,y) = \ln(1+x+y)$
   Il faut que $1+x+y$ soit strictement positif, afin de pouvoir calculer son logarithme. Donc :
   $$D_f = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1+x+y > 0\right\}$$
   Pour tracer cet ensemble, on trace d'abord la droite d'équation $1+x+y=0$. On détermine ensuite de quel côté de la droite est l'ensemble $1+x+y>0$. Ici, c'est au-dessus de la droite.

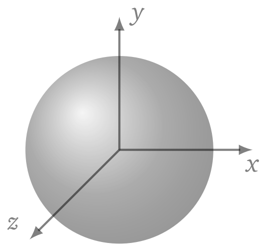



2. $f(x,y) = \exp\left(\frac{x+y}{x^2-y}\right)$
   Le dénominateur ne doit pas s'annuler :
   $$D_f = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 - y \neq 0\right\}$$
   Les points de l'ensemble de définition sont tous les points du plan qui ne sont pas sur la parabole d'équation $(y = x^2)$.




3. $f(x,y,z) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2-2}}$
   L'expression sous la racine doit être positive (pour pouvoir prendre la racine carrée) et ne doit pas s'annuler (pour pouvoir prendre l'inverse). Donc :
   $$D_f = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2 > 2\right\}$$

Autrement dit, ce sont tous les points en dehors de la boule fermée centrée en $(0,0,0)$ et de rayon $\sqrt{2}$.




**Définition 3.**
L'***image*** d'une fonction $f : E \to \mathbb{R}$ est l'ensemble des valeurs $f(x_1,\dots,x_n)$ prises par $f$ lorsque $(x_1,\dots,x_n)$ parcourt $E$ :

$$\operatorname{Im} f = \left\{ f(x_1,\dots,x_n) \mid (x_1,\dots,x_n) \in E \right\} \subset \mathbb{R}$$

**Exemple 5.**

1. $f(x,y) = \ln(1+x+y)$
   L'image de $f$ est $\mathbb{R}$ tout entier : $\operatorname{Im} f = \mathbb{R}$.
   Preuve : soit $z \in \mathbb{R}$. Alors, pour $(x,y) = (e^z,-1) \in D_f$, on a
   $$f(x,y) = f(e^z,-1) = \ln(e^z) = z.$$
   Donc tout $z \in \mathbb{R}$ est dans l'image de $f$.
2. $f(x,y) = \exp\left(\frac{x+y}{x^2-y}\right)$
   $\operatorname{Im} f = ]0,+\infty[$.
   Preuve : On a bien sûr $f(x,y) > 0$ pour tout $(x,y) \in D_f$. Réciproquement, soit $z \in ]0,+\infty[$. Si $z \neq 1$ alors, pour $(x,y) = (\frac{1}{\ln z},0) \in D_f$, on a
   $$f(x,y) = f(\tfrac{1}{\ln z},0) = \exp\left(\frac{\frac{1}{\ln z}}{(\frac{1}{\ln z})^2}\right) = \exp(\ln z) = z.$$
   Si $z = 1$ alors, pour $(x,y) = (1,-1) \in D_f$, on a $f(x,y) = f(1,-1) = \exp(0) = 1$.
3. Pour $f(x,y,z) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2-2}}$, on a $\operatorname{Im} f = ]0,+\infty[$. À vous de faire la preuve !

**Définition 4.**
Soit $E$ une partie de $\mathbb{R}^n$. Une ***fonction vectorielle*** $f : E \to \mathbb{R}^p$ associe à tout $(x_1,\dots,x_n)$ de $E$ un $p$-uplet de nombres réels. On la note

$$\begin{array}{rccl} f : & \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R}^p \\ & x & \longmapsto & \big(f_1(x), f_2(x), \dots, f_p(x)\big). \end{array}$$

Nous nous limiterons souvent aux dimensions inférieures ou égales à 3 pour $n$ et $p$, la généralisation aux dimensions supérieures ne posant pas de problème particulier, sauf pour faire des dessins. Voici quelques exemples simples.

**Exemple 6.**

1. Aire et volume d'un parallélépipède rectangle en fonction de ses trois dimensions :
   $$\begin{array}{rccl} f : & \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & (x,y,z) & \longmapsto & \big(2(xy+yz+xz), xyz\big). \end{array}$$
2. Coordonnées polaires d'un point du plan :
   $$\begin{array}{rccl} f : & \mathbb{R}_+ \times [0,2\pi[ & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & (r,\theta) & \longmapsto & (r\cos\theta, r\sin\theta). \end{array}$$

## 2.2. Graphe et lignes de niveau

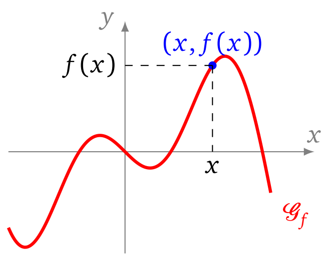
**Définition 5.**
Soit $f : D_f \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction de 2 variables. Le ***graphe*** $\mathcal{G}_f$ de $f$ est le sous-ensemble de $\mathbb{R}^3$ formé des points de coordonnées $(x, y, f(x, y))$ avec $(x, y)$ dans l'ensemble de définition. Le graphe est donc :

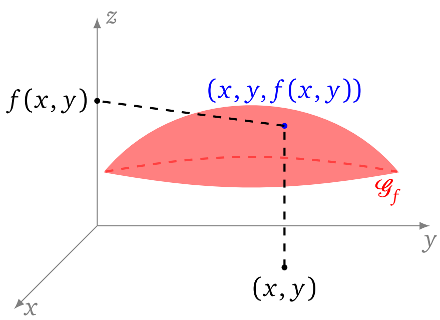
$$\mathcal{G}_f = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x, y) \in D_f \text{ et } z = f(x, y)\}.$$

Représenter graphiquement le graphe n'est possible que pour les fonctions d'une seule variable ou de deux variables. Pour les fonctions d'une variable $f : D_f \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, on rappelle que le graphe est

$$\mathcal{G}_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in D_f \text{ et } y = f(x)\}.$$

Dans le cas d'une variable (à gauche), le graphe est une courbe ; dans le cas de deux variables qui nous intéresse ici, c'est une surface.



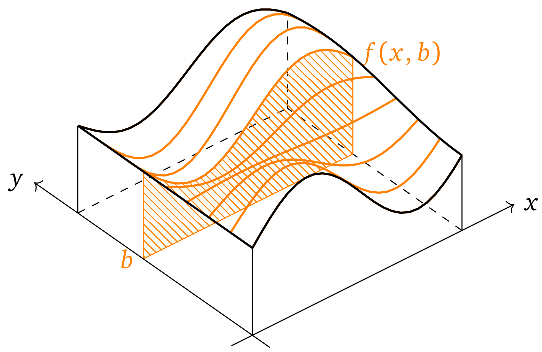



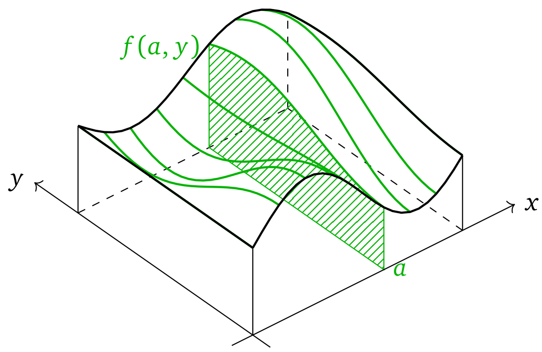

Afin de tracer le graphe d'une fonction de deux variables, on découpe la surface en morceaux.

***Tranches.***
Une première façon de faire : tracer, pour quelques valeurs de $a$ et $b$, les graphes des fonctions partielles

$$f_1 : x \mapsto f(x, b) \quad \text{et} \quad f_2 : y \mapsto f(a, y).$$

La première représente l'intersection du graphe $\mathcal{G}_f$ avec le plan $(y = b)$ (en orange) et la seconde représente l'intersection du graphe avec le plan $(x = a)$ (en vert).




***Lignes de niveau.***
On va aussi s'intéresser à d'autres courbes tracées sur la surface : les courbes de niveau.

**Définition 6.**
Soit $f : D_f \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction de deux variables.

- La ***ligne de niveau*** $z = c \in \mathbb{R}$ est

$$L_c = \{(x, y) \in D_f \mid f(x, y) = c\}.$$

- La *courbe de niveau* $z = c$ est la trace de $\mathscr{G}_f$ dans le plan $(z = c)$ :

$$\mathscr{G}_f \cap (z = c) = \big\{(x, y, c) \in \mathbb{R}^3 \mid f(x, y) = c\big\}.$$

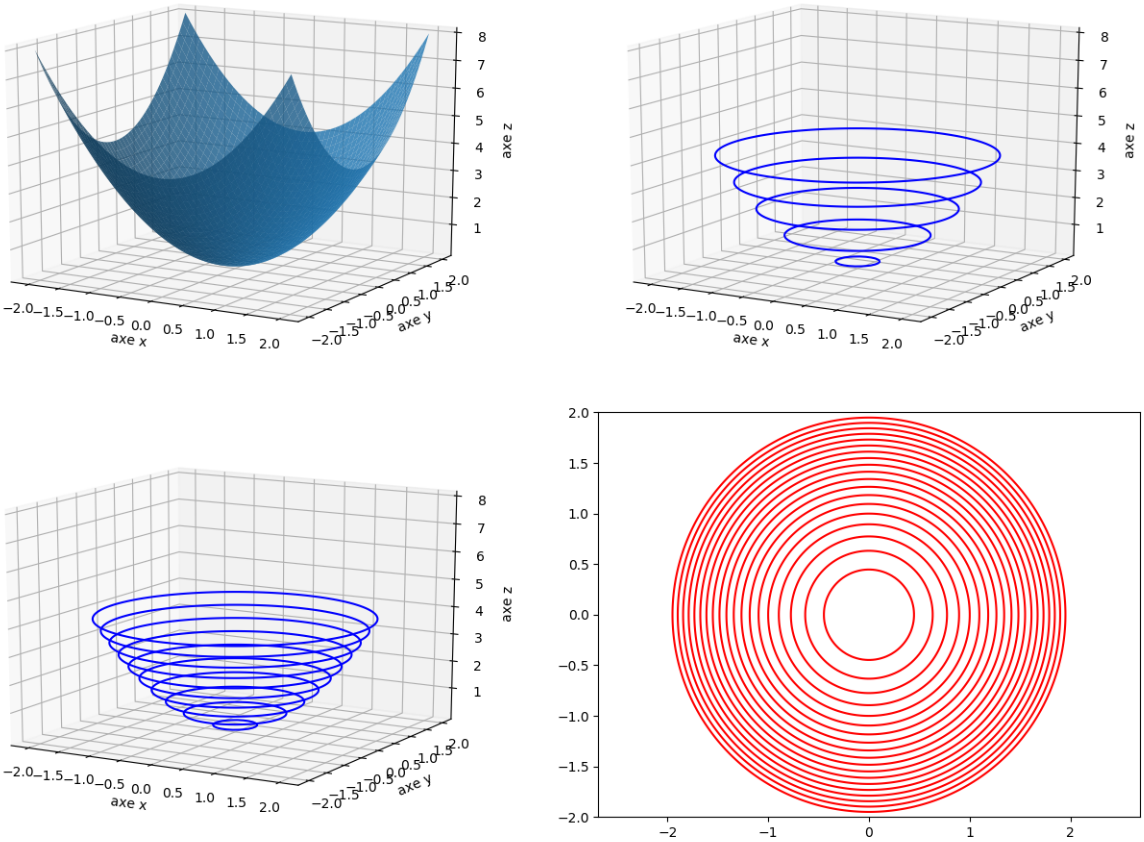
La ligne de niveau $c$ est une courbe du plan $\mathbb{R}^2$, la courbe de niveau $c$ est une courbe de l'espace $\mathbb{R}^3$. On obtient la courbe de niveau $c$ en partant de la ligne de niveau $c$ et en remontant à l'altitude $c$.

**Exemple 7.**
Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x, y) = x^2 + y^2$.

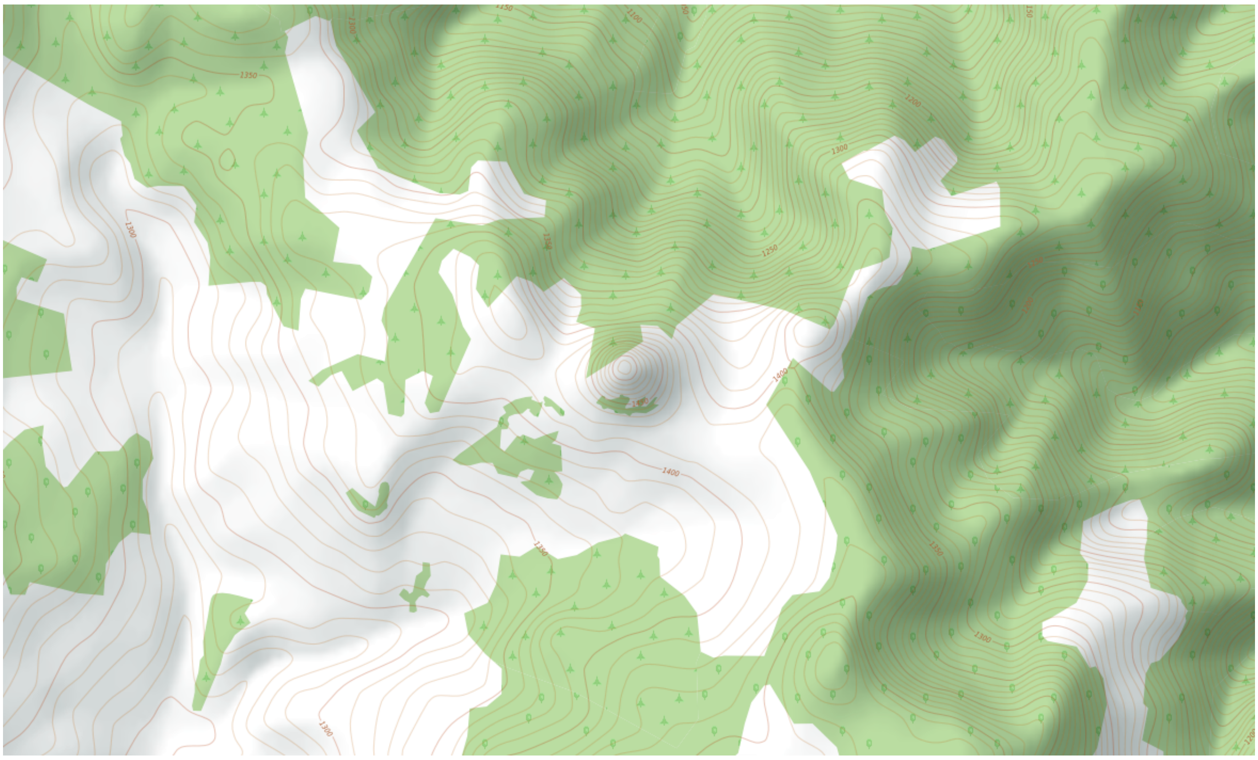
- Si $c < 0$, la ligne de niveau $L_c$ est vide (aucun point n'a d'altitude négative).
- Si $c = 0$, la ligne de niveau $L_0$ se réduit à $\{(0, 0)\}$.
- Si $c > 0$, la ligne de niveau $L_c$ est le cercle du plan de centre $(0, 0)$ et de rayon $\sqrt{c}$. On remonte $L_c$ à l'altitude $z = c$ : la courbe de niveau est alors le cercle horizontal de l'espace de centre $(0, 0, c)$ et de rayon $\sqrt{c}$.

Le graphe est alors une superposition de cercles horizontaux de l'espace de centre $(0, 0, c)$ et de rayon $\sqrt{c}$ avec $c \geqslant 0$.

Ci-dessous : (a) le graphe, appelé paraboloïde de révolution, (b) 5 courbes de niveau, (c) 10 courbes de niveau, (d) des lignes de niveau dans le plan.



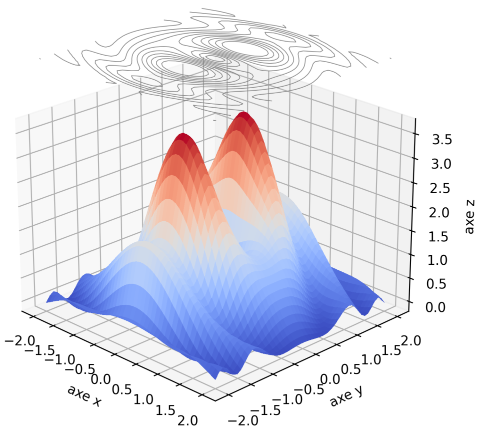

**Exemple 8.**
Sur une carte topographique, les lignes de niveau représentent les courbes ayant la même altitude.

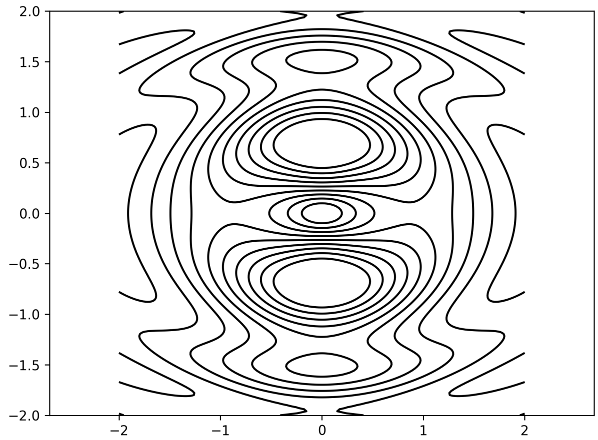


- Ici, une carte *Open Street Map* avec, au centre, le mont Gerbier-de-Jonc (source de la Loire, 1551 m).
- Les lignes de niveau correspondent à des altitudes par cran de 10 m (par exemple, pour $c = 1400$, $c = 1410$, $c = 1420\ldots$).
- Lorsque les lignes de niveau sont très espacées, le terrain est plutôt plat ; lorsque les lignes sont rapprochées, le terrain est pentu.
- Par définition, si on se promène en suivant une ligne de niveau, on reste toujours à la même altitude !

**Exemple 9.**
L'image qui a servi lors de l'introduction est le graphe et les lignes de niveau de la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$(x, y) \mapsto z = \frac{\sin\left(x^2+3y^2\right)}{\frac{1}{10}+r^2} + \left(x^2+5y^2\right)\cdot\frac{\exp\left(1-r^2\right)}{2} \qquad \text{avec} \qquad r = \sqrt{x^2+y^2}.$$




***Surfaces de niveau.***
Pour les fonctions de 3 variables, le graphe étant dans $\mathbb{R}^4$, on ne peut le dessiner. La notion analogue à la ligne de niveau est celle de ***surface de niveau***, donnée par l'équation $f(x, y, z) = c$.

**Exemple 10.**
$f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$. Les surfaces de niveau sont données par l'équation $x^2 + y^2 + z^2 = c$. Pour $c \geqslant 0$, ces surfaces sont des sphères, centrées à l'origine et de rayon $\sqrt{c}$. Voici ces surfaces pour $c = 1, 3, 5$. Elles ont été découpées pour laisser entrevoir les surfaces des différents niveaux.

## 2.3. Exemples de surfaces quadratiques

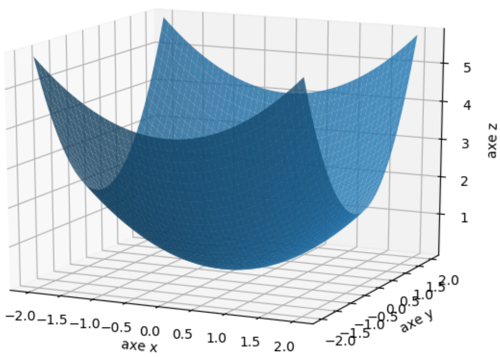
Ce sont des exemples à connaître, car ils seront fondamentaux pour la suite du cours.

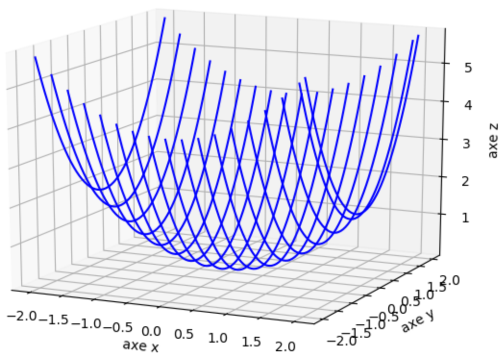
**Exemple 11.**

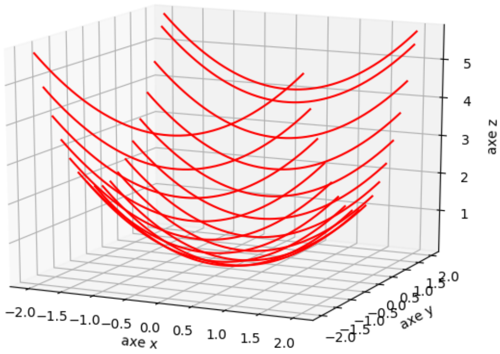
$$f(x,y) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$$

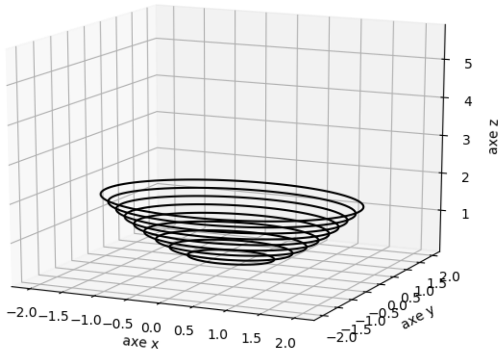
- Les tranches sont des paraboles.
- Les lignes de niveau sont des ellipses.
- Le graphe est donc un ***paraboloïde elliptique***.

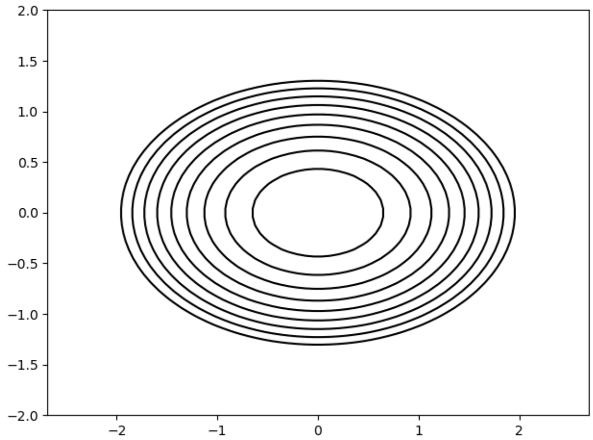
Ci-dessous : (a) la surface, (b) des tranches avec $x$ constant, (c) des tranches avec $y$ constant, (d) des courbes de niveau, (e) des lignes de niveau dans le plan.





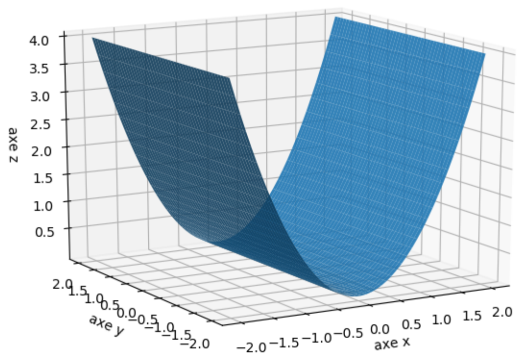



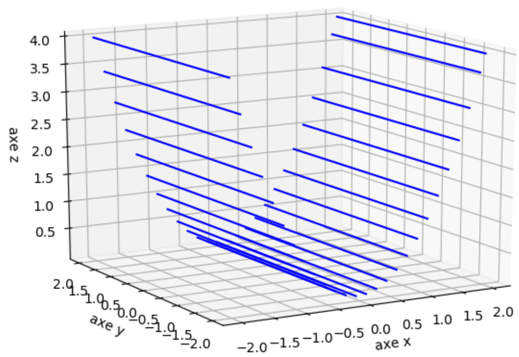
**Exemple 12.**

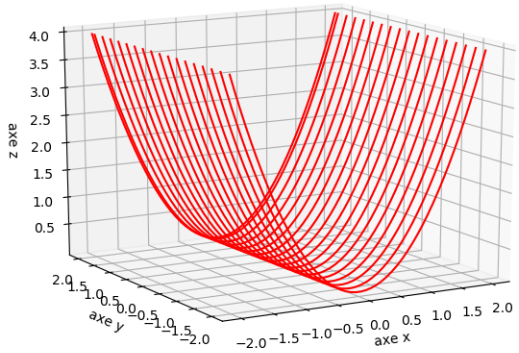
$$f(x, y) = x^2$$

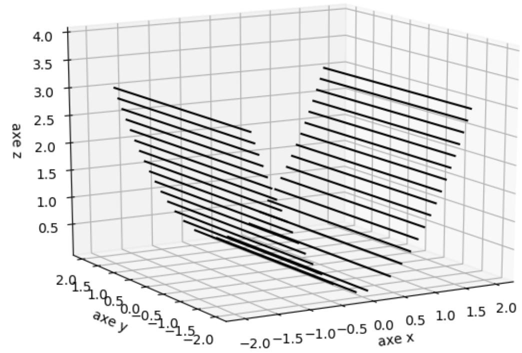
- Les tranches (à $y$ constant) sont des paraboles.
- Les lignes de niveau sont des paires de droites.
- Le graphe est donc un ***cylindre parabolique***.

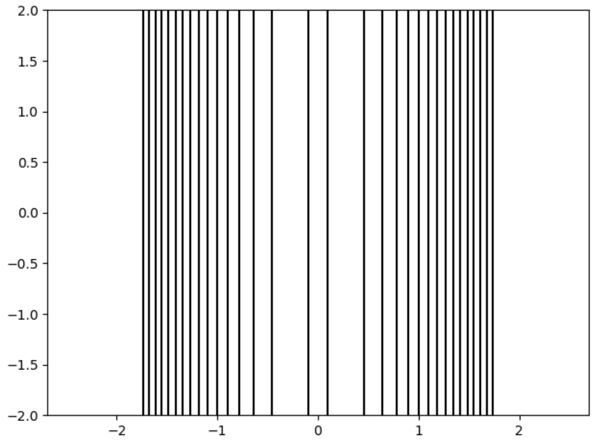
Ci-dessous : (a) la surface, (b) des tranches avec $x$ constant, (c) des tranches avec $y$ constant, (d) des courbes de niveau, (e) des lignes de niveau dans le plan.





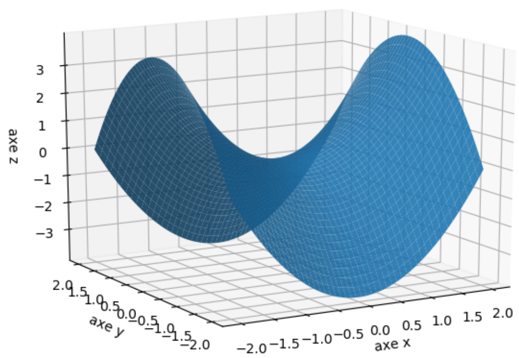



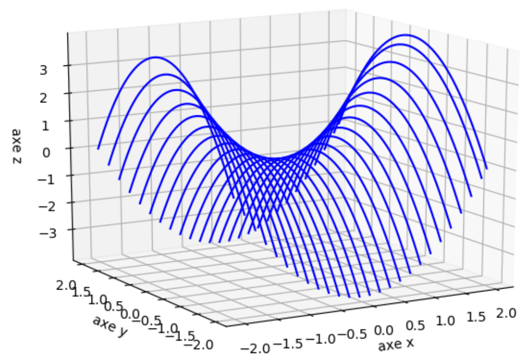
**Exemple 13.**

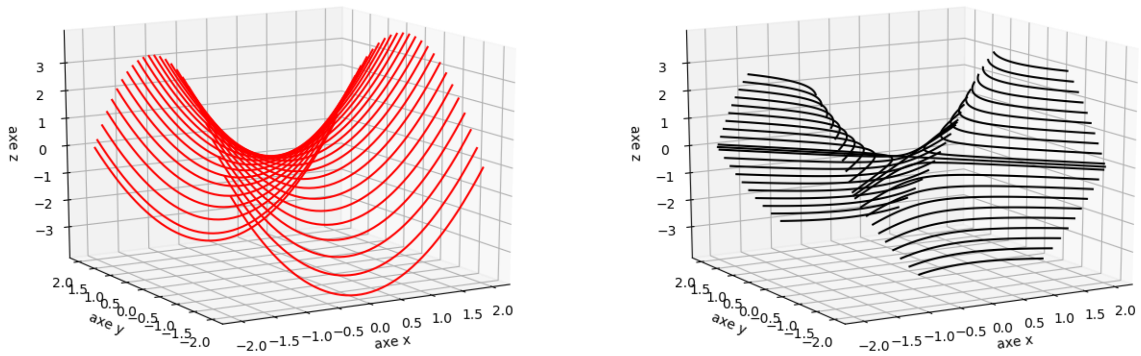
$$f(x,y) = x^2 - y^2$$

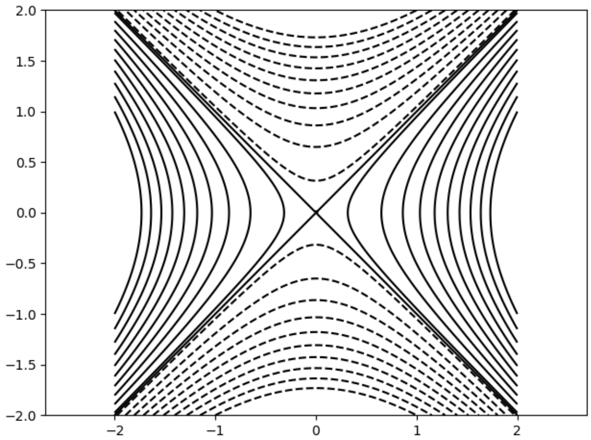
- Les tranches sont des paraboles.
- Les lignes de niveau sont des hyperboles.
- Le graphe est donc un ***paraboloïde hyperbolique***, que l'on appelle aussi la ***selle de cheval***.
- Un autre nom pour cette surface est un ***col*** (du nom d'un col de montagne). En effet, le point $(0,0,0)$ est le point de passage le moins haut pour passer d'un versant à l'autre de la montagne.

Ci-dessous : (a) la surface, (b) des tranches avec $x$ constant, (c) des tranches avec $y$ constant, (d) des courbes de niveau, (e) des lignes de niveau dans le plan (en pointillé les lignes de niveau négatif).





**Mini-exercices.**

1. Déterminer et dessiner le domaine de définition de la fonction définie par $f(x,y)=\ln(xy)$. Même question avec $g(x,y)=\sqrt{2x-y^2+1}$ et $h(x,y,z)=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}$.
2. Déterminer l'image des fonctions de la question précédente.
3. Soit $f(x,y)=xy$. Dessiner le graphe de $f$, les tranches et les lignes de niveau. Quelle surface reconnaissez-vous ? Vous pouvez vous aider d'un ordinateur. Mêmes questions avec $g(x,y)=-x^2-y^2$.

# 3. Limites

Les notions de limite et de continuité des fonctions d'une seule variable se généralisent en plusieurs variables sans complexité supplémentaire : il suffit de remplacer la valeur absolue par la norme euclidienne.

## 3.1. Définition

Soit $f$ une fonction $f: E\subset\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ définie au voisinage de $x_0\in\mathbb{R}^n$, sauf peut-être en $x_0$.

**Définition 7.**
La fonction $f$ admet pour ***limite*** le nombre réel $\ell$ lorsque $x$ tend vers $x_0$ si :

$$\forall\epsilon>0\quad\exists\delta>0\qquad\forall x\in E\qquad 0<\|x-x_0\|<\delta\implies|f(x)-\ell|<\epsilon$$

On écrit alors

$$\lim_{x_0} f=\ell\qquad\text{ou}\qquad\lim_{x\to x_0} f(x)=\ell\qquad\text{ou}\qquad f(x)\xrightarrow[x\to x_0]{}\ell.$$

On définirait de même $\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty$ par :

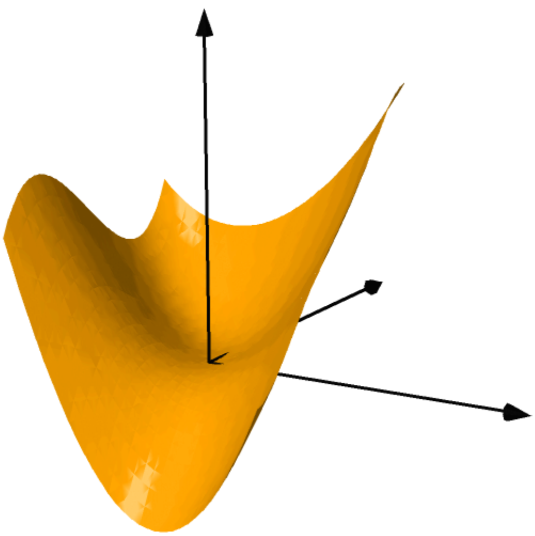
$$\forall A > 0 \quad \exists \delta > 0 \qquad \forall x \in E \qquad 0 < \|x - x_0\| < \delta \implies |f(x)| > A$$

**Remarque.**

- La notion de limite ne dépend pas ici des normes utilisées.
- Si elle existe, la limite est unique.

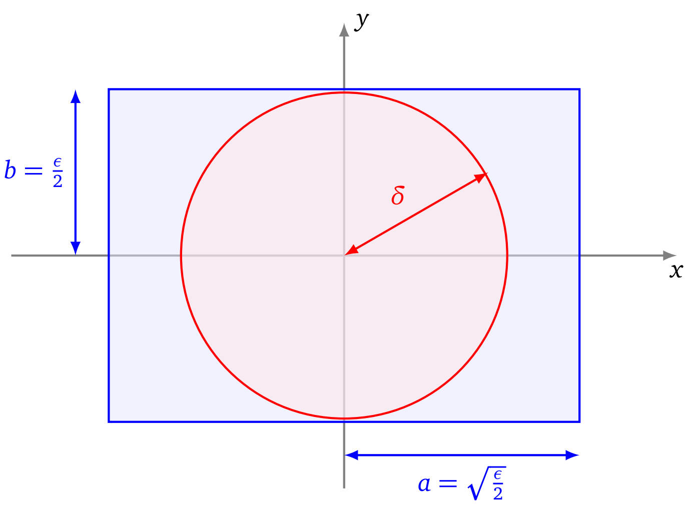
**Exemple 14.**
Soit $f$ la fonction définie par $f(x,y) = x^2 + y\sin(x+y^2)$.

1. Montrer que $f(x,y)$ tend vers $0$ lorsque $(x,y) \to (0,0)$.
2. Trouver un ouvert $U$ contenant l'origine tel que, pour tout $(x,y) \in U$, on ait $|f(x,y)| < \frac{1}{100}$.



*Solution.*

1. On majore $|f(x,y)|$ en utilisant l'inégalité triangulaire et $|\sin(t)| \leqslant 1$ :
$$\big|f(x,y)\big| = \big|x^2 + y\sin(x+y^2)\big| \leqslant x^2 + |y|\big|\sin(x+y^2)\big| \leqslant x^2 + |y|$$
Fixons $0 < \epsilon < 1$. Fixons $a = \sqrt{\frac{\epsilon}{2}}$ et $b = \frac{\epsilon}{2}$. Alors, pour $x \in\, ]-a, a[$, on a $x^2 < \frac{\epsilon}{2}$ et, pour $y \in\, ]-b, b[$, on a $|y| < \frac{\epsilon}{2}$. Pour $(x,y) \in\, ]-a, a[\times]-b, b[$, on a donc
$$\big|f(x,y)\big| \leqslant x^2 + |y| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$
Une valeur $\delta$ qui convient est donc $\delta = \frac{\epsilon}{2}$. En effet, si $\|(x,y)\| < \delta$ alors $|x| < \delta = \frac{\epsilon}{2} \leqslant \sqrt{\frac{\epsilon}{2}}$ et $|y| < \delta = \frac{\epsilon}{2}$ donc $|f(x,y)| < \epsilon$. Conclusion : $f$ admet pour limite $0$ lorsque $(x,y)$ tend vers $(0,0)$.




2. Pour $\epsilon = \frac{1}{100}$, on a $a = \frac{1}{\sqrt{200}}$ et $b = \frac{1}{200}$. Pour chaque $(x, y)$ de l'ouvert $]-a, a[\times]-b, b[$, on a $|f(x, y)| < \frac{1}{100}$.

## 3.2. Opérations sur les limites

Pour calculer les limites, on ne recourt que rarement à cette définition. On utilise plutôt les théorèmes généraux : opérations sur les limites et encadrement. Ce sont les mêmes énoncés que pour les fonctions d'une variable : il n'y a aucune difficulté ni nouveauté.

**Proposition 1** (Opérations sur les limites).
*Soient $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ définies au voisinage de $x_0 \in \mathbb{R}^n$ et telles que $f$ et $g$ admettent des limites en $x_0$. Alors :*

$$\lim_{x_0}(f+g) = \lim_{x_0} f + \lim_{x_0} g \qquad \lim_{x_0}(f \cdot g) = \lim_{x_0} f \times \lim_{x_0} g$$

*Et si $g$ ne s'annule pas dans un voisinage de $x_0$ :*

$$\lim_{x_0} \frac{1}{g} = \frac{1}{\lim_{x_0} g} \qquad \lim_{x_0} \frac{f}{g} = \frac{\lim_{x_0} f}{\lim_{x_0} g}$$

**Remarque.**

- Les résultats ci-dessus sont aussi valables pour des limites infinies avec les conventions usuelles :

$$\ell + \infty = +\infty, \quad \ell - \infty = -\infty, \quad \frac{1}{0^+} = +\infty, \quad \frac{1}{0^-} = -\infty, \quad \frac{1}{\pm\infty} = 0,$$
$$\ell \times \infty = \infty \ (\ell \neq 0), \ \infty \times \infty = \infty \text{ (avec règle de multiplication des signes).}$$

- Les formes indéterminées sont : $+\infty - \infty$, $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, $0 \times \infty$, , $\infty^0$, $1^\infty$ et $0^0$.

La composition est aussi souvent utile :

- soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction de plusieurs variables, telle que $\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$,
- soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction d'une seule variable, telle que $\lim_{t \to \ell} g(t) = \ell'$,
- alors la fonction de plusieurs variables $g \circ f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ définie par $(g \circ f)(x) = g\big(f(x)\big)$ vérifie $\lim_{x \to x_0}(g \circ f)(x) = \ell'$.

Application : grâce à l'exemple 14, et comme $e^t \to 1$ lorsque $t \to 0$, on en déduit :

$$e^{x^2 + y\sin(x+y^2)} \xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{} 1$$

Il existe aussi un théorème « des gendarmes ».

**Théorème 1** (Théorème d'encadrement).
*Soient $f, g, h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ trois fonctions définies dans un voisinage $U$ de $x_0 \in \mathbb{R}^n$.*

- *Si, pour tout $x \in U$, on a $f(x) \leqslant h(x) \leqslant g(x)$,*

- *et si* $\lim_{x_0} f = \lim_{x_0} g = \ell$,

*alors* $h$ *admet une limite au point* $x_0$ *et* $\lim_{x_0} h = \ell$.

**Exemple 15.**
Soit $h$ définie par $h(x, y) = \cos(x + y^2)\big(x^2 + y\sin(x + y^2)\big)$. On majore la valeur absolue du cosinus par 1 :

$$\big|h(x, y)\big| \leqslant \big|x^2 + y\sin(x + y^2)\big|.$$

On a vu lors de l'exemple 14 que la fonction définie par $f(x, y) = x^2 + y\sin(x + y^2)$ tend vers 0 en $(0, 0)$. Donc, par le théorème des gendarmes, $h(x, y)$ tend aussi vers 0 lorsque $(x, y)$ tend vers $(0, 0)$.

## 3.3. Limite le long d'un chemin

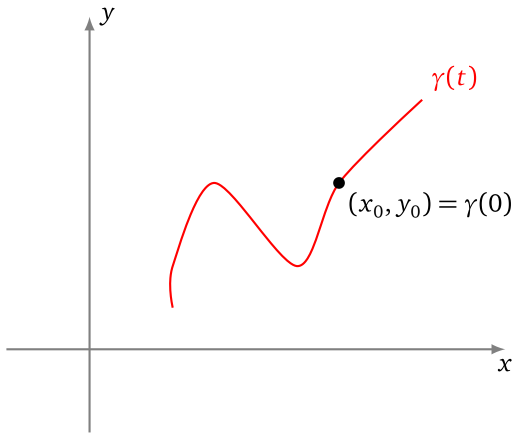
L'unicité de la limite implique que, quelle que soit la façon dont on arrive au point $x_0$, la valeur limite est toujours la même.

**Proposition 2.**
*Soit* $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *une fonction définie au voisinage de* $x_0 \in \mathbb{R}^n$*, sauf peut-être en* $x_0$.

1. *Si* $f$ *admet une limite* $\ell$ *au point* $x_0$*, alors la restriction de* $f$ *à toute courbe passant par* $x_0$ *admet une limite en* $x_0$ *et cette limite est* $\ell$.
2. *Par contraposée, si les restrictions de* $f$ *à deux courbes passant par* $x_0$ *ont des limites différentes au point* $x_0$*, alors* $f$ *n'admet pas de limite au point* $x_0$.

Détaillons dans les cas des fonctions de deux variables :

- Une courbe passant par le point $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ est une fonction continue $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $t \mapsto (x(t), y(t))$, telle que $\gamma(0) = (x_0, y_0)$.
- La restriction de $f$ le long de $\gamma$ est la fonction d'une variable $f \circ \gamma : t \mapsto f\big(x(t), y(t)\big)$.
- Si $f$ a pour limite $\ell$ en $(x_0, y_0)$ alors la première partie de la proposition affirme que $f\big(x(t), y(t)\big) \xrightarrow[t \to 0]{} \ell$.




**Exemple 16.**
Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

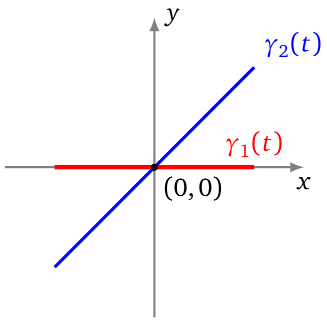
$$f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2} \text{ si } (x, y) \neq (0, 0) \quad \text{et} \quad f(0, 0) = 0.$$

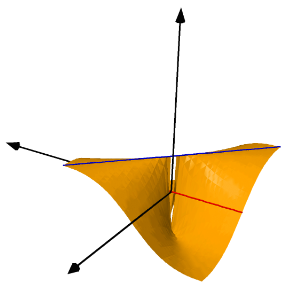
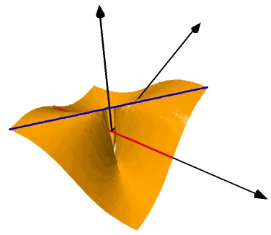
La fonction $f$ admet-elle une limite en $(0, 0)$ ?

*Solution.*

- Si on prend le chemin $\gamma_1(t) = (t, 0)$, alors $(f \circ \gamma_1)(t) = f(t, 0) = 0$. Donc, lorsque $t \to 0$, $(f \circ \gamma_1)(t) \to 0$.

- Si on prend le chemin $\gamma_2(t) = (t, t)$, alors $(f \circ \gamma_2)(t) = f(t, t) = \frac{t^2}{2t^2} = \frac{1}{2}$. Donc, lorsque $t \to 0$, $(f \circ \gamma_2)(t) \to \frac{1}{2}$.
  Ci-dessous, sur la figure de gauche, les deux chemins du plan ; sur les deux figures de droite, deux vues différentes des valeurs prises par $f$ le long de ces chemins.



- Si $f$ admettait une limite $\ell$ alors, quel que soit le chemin $\gamma(t)$ tel que $\gamma(t) \to (0, 0)$ lorsque $t \to 0$, on aurait $(f \circ \gamma)(t) \to \ell$. On aurait donc $\ell = 0$ et $\ell = \frac{1}{2}$, ce qui contredirait l'unicité de la limite. Ainsi, $f$ n'a pas de limite en $(0, 0)$.

Une autre formulation possible :
Si $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ a pour limite $\ell$ en $x_0 \in \mathbb{R}^n$ alors, pour toute suite $(u_n)$ d'éléments de $\mathbb{R}^n$ telle que $u_n \to x_0$, on a $f(u_n) \to \ell$. Pour les fonctions de deux variables, cela s'écrit ainsi : si $f$ a pour limite $\ell$ en $(a, b)$ alors, pour toute suite $(a_n, b_n) \to (a, b)$, on a $f(a_n, b_n) \to \ell$.

## 3.4. Fonctions continues

**Définition 8.**

1. $f : E \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est ***continue en $x_0$*** $\in E$ si $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.
2. $f$ est ***continue sur $E$*** si elle est continue en tout point de $E$.

Par les propriétés des limites, si $f$ et $g$ sont deux fonctions continues en $x_0$, alors :
- la fonction $f + g$ est continue en $x_0$,
- de même $fg$ et $f/g$ (avec $g(x) \neq 0$ sur un voisinage de $x_0$) sont continues en $x_0$,
- si $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est continue, alors $h \circ f$ est continue en $x_0$.

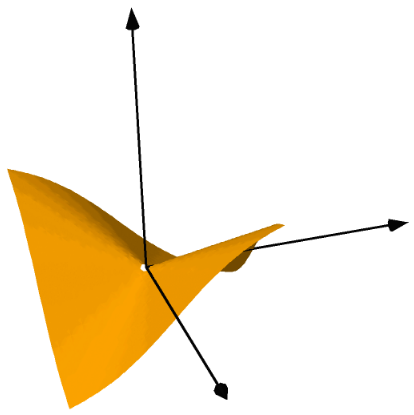
**Exemple 17.**
- Les applications définies par $(x, y) \mapsto x + y$, $(x, y) \mapsto xy$, puis toutes les fonctions polynômes en deux variables $x$ et $y$ sont continues sur $\mathbb{R}^2$ (par exemple $(x, y) \mapsto x^2 + 3xy$). De la même façon, toutes les fractions rationnelles en deux variables sont continues là où elles sont définies.
- Comme l'exponentielle est une fonction continue, alors $(x, y) \mapsto e^{xy}$ est continue sur $\mathbb{R}^2$.
- La fonction définie par $f(x, y) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$ est continue sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$.

**Définition 9** (Prolongement par continuité).
Soit $f : E \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Soit $x_0$ un point adhérent à $E$ n'appartenant pas à $E$. Si $f(x)$ a une limite $\ell$ lorsque $x \to x_0$, on peut étendre le domaine de définition de $f$ à $E \cup \{x_0\}$ en posant $f(x_0) = \ell$. La fonction étendue est continue en $x_0$. On dit que l'on a obtenu un ***prolongement de $f$ par continuité*** au point $x_0$.

**Exemple 18.**
Soit $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ définie par

$$f(x, y) = \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

Est-il possible de prolonger $f$ par continuité en $(0,0)$ ?
Sur la figure ci-dessous, la question devient simplement : est-il possible de boucher le trou au milieu de la surface en rajoutant juste un point ?



*Solution.*

- **Limite à l'origine.**
  On utilise que $|x| \leqslant \sqrt{x^2+y^2}$ et $|y| \leqslant \sqrt{x^2+y^2}$. Donc
  $$|f(x,y)| = \frac{|x|\cdot|y|}{\sqrt{x^2+y^2}} \leqslant \sqrt{x^2+y^2} \xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{} 0.$$
- **Prolongement.**
  Pour prolonger $f$ en $(0,0)$, on choisit comme valeur la limite obtenue. On pose donc $f(0,0)=0$. (On note encore $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction prolongée.)
- **Continuité.**
  Par notre choix de $f(0,0)$, $f$ est continue en $(0,0)$. En dehors de l'origine, $f$ est continue comme somme, produit, composition, inverse de fonctions continues. Conclusion : la fonction prolongée est continue sur $\mathbb{R}^2$ tout entier.

**Mini-exercices.**

1. Soit $f(x,y)=\frac{1+x}{1+y}$. Trouver un ouvert $U$ contenant l'origine tel que $0.999 < f(x,y) < 1.001$ pour tout $(x,y)\in U$.
2. Soit $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction continue au point $(x_1,\dots,x_n)$. Montrer que la fonction partielle $f_i:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ définie par $f_i(t)=f(x_1,\dots,x_{i-1},t,x_{i+1},\dots,x_n)$ est continue en $x_i$.
3. Sachant que la limite de $f(x,y)=\frac{1+x}{1+y}$ en $(0,0)$ est 1, calculer la limite des fonctions suivantes en $(0,0)$ : $\frac{1+x}{1+y}+x^2+y^2$ ; $\frac{1+y}{1+x}$ ; $\sin(xy)\frac{1+x}{1+y}$ ; $\ln\left(\frac{1+x}{1+y}\right)$.
4. Sachant que $\ln(t)\leqslant t-1$ pour tout $t>0$, calculer la limite de $\frac{\ln(1+xy)}{1+x^2+y^4}$ en $(0,0)$.
5. Soit $f(x,y)=\frac{\sin(x^2-y^2)}{x^2+y^2}$. Soit $\gamma(t)=(at,bt)$ où $(a,b)\in\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$ est fixé. Calculer la limite de $(f\circ\gamma)(t)$ lorsque $t\to 0$ en fonction de $(a,b)$. $f$ admet-elle une limite en $(0,0)$ ? $f$ est-elle prolongeable par continuité en $(0,0)$ ?
6. Soit $f$ définie sur $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$ par $f(x,y)=\frac{xy^3}{x^2+2y^2}$. $f$ admet-elle une limite en $(0,0)$ ? $f$ est-elle prolongeable par continuité en $(0,0)$ ? Mêmes questions avec $f(x,y)=\frac{xy^3}{x^4+2y^4}$.

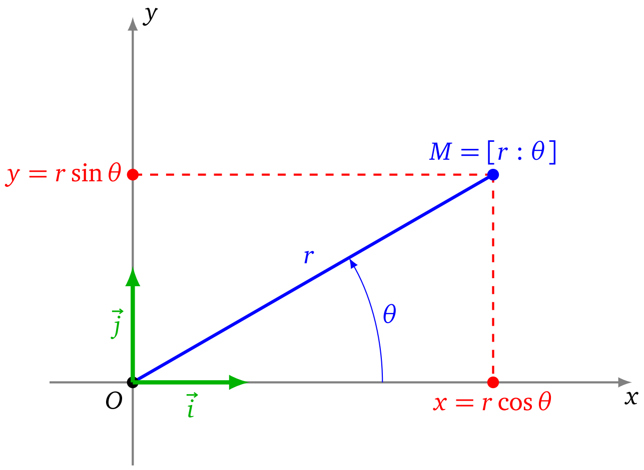
# 4. Coordonnées polaires

Plutôt que de repérer un point du plan $\mathbb{R}^2$ par ses coordonnées cartésiennes $(x, y)$, on peut le faire au moyen de sa distance à l'origine et de l'angle formé avec l'horizontale : ce sont les coordonnées polaires.

## 4.1. Définition

Soit $M$ un point du plan $\mathbb{R}^2$. Soit $O = (0, 0)$ l'origine. Soit $(O, \vec{i}, \vec{j})$ un repère orthonormé direct.

- On note $r = \|\overrightarrow{OM}\|$, la distance de $M$ à l'origine.
- On note $\theta$ l'angle entre $\vec{i}$ et $\overrightarrow{OM}$.




On note $[r : \theta]$ les *coordonnées polaires* du point $M$. Dans ce cours, $r$ sera toujours positif. L'angle n'est pas déterminé de manière unique, plusieurs choix sont possibles. Pour avoir unicité, on peut limiter $\theta$ à l'intervalle $[0, 2\pi[$, ou bien $]-\pi, +\pi]$. On n'attribue généralement pas de coordonnées polaires au point origine (l'angle n'aurait pas de sens).

***Coordonnées polaires vers coordonnées cartésiennes.***
On retrouve les coordonnées cartésiennes $(x, y)$ à partir des coordonnées polaires $[r : \theta]$ par les formules

$$x = r\cos\theta \qquad \text{et} \qquad y = r\sin\theta.$$

Autrement dit, on a défini une application :

$$]0, +\infty[\times[0, 2\pi[\to \mathbb{R}^2 \qquad (r, \theta) \mapsto (r\cos\theta, r\sin\theta).$$

***Coordonnées cartésiennes vers coordonnées polaires.***
On retrouve $r$ et $\theta$ à partir de $(x, y)$ par les formules suivantes :

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

et, dans le cas $x > 0$ et $y \geqslant 0$,

$$\theta = \arctan\left(\frac{y}{x}\right).$$

Pour les points dans les autres quadrants, on se ramène au quadrant principal où $x > 0$ et $y \geqslant 0$.

## 4.2. Limite et continuité

Lorsque l'on considère des applications $f : E \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, il est quelquefois plus facile de prouver des résultats de limite, continuité, etc., en passant par les coordonnées polaires.

**Proposition 3.**
*Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction définie au voisinage de $(0,0) \in \mathbb{R}^2$, sauf peut-être en $(0,0)$. Si*
$$\lim_{r\to 0} f(r\cos\theta, r\sin\theta) = \ell \in \mathbb{R}$$
*existe indépendamment de $\theta$, c'est-à-dire qu'il existe une fonction $\epsilon(r) \xrightarrow[r\to 0]{} 0$ telle que, pour tout $r > 0$ et tout $\theta$, on a :*
$$\left|f(r\cos\theta, r\sin\theta) - \ell\right| \leqslant \epsilon(r),$$
*alors $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \ell$.*

Pour clarifier cette proposition et expliquer les différents cas pratiques de la limite, voici comment faire. On exprime $f(x,y)$ en coordonnées polaires en calculant $f(r\cos\theta, r\sin\theta)$.

1. Si $\lim_{r\to 0} f(r\cos\theta, r\sin\theta)$ existe et si elle ne dépend pas de la variable $\theta$, alors cette limite est la limite de $f$ au point $(0,0)$.
2. Si $\lim_{r\to 0} f(r\cos\theta, r\sin\theta)$ n'existe pas (ou la limite n'est pas finie), alors $f$ n'a pas de limite finie au point $(0,0)$.
3. Si $\lim_{r\to 0} f(r\cos\theta, r\sin\theta) = \ell(\theta)$ dépend de $\theta$, alors $f$ n'a pas de limite au point $(0,0)$. Pour le justifier, on donne deux valeurs $\theta_1$ et $\theta_2$ telles que $\ell(\theta_1) \neq \ell(\theta_2)$.

Voyons un exemple de chaque situation.

**Exemple 19.**

1. $f(x,y) = \dfrac{x^3}{x^2+y^2}$
$$f(r\cos\theta, r\sin\theta) = \frac{r^3\cos^3\theta}{r^2(\cos^2\theta + \sin^2\theta)} = \frac{r^3\cos^3\theta}{r^2} = r\cos^3\theta$$
Comme $\left|\cos^3\theta\right| \leqslant 1$ alors $r|\cos^3\theta| \leqslant r$ (pour tout $r$ mais aussi pour tout $\theta$) avec $\epsilon(r) := r \xrightarrow[r\to 0]{} 0$. Ce qui implique que $f(r\cos\theta, r\sin\theta) \xrightarrow[r\to 0]{} 0$. La limite existe (indépendamment des valeurs prises par $\theta$), donc la fonction $f$ admet bien une limite en $(0,0)$ : $f(x,y) \xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{} 0$.
Pour ceux qui voudraient tout faire à la main avec plus de détails, on peut aussi écrire $\left|f(r\cos\theta, r\sin\theta)\right| \leqslant r$, autrement dit $\left|f(x,y)\right| \leqslant \sqrt{x^2+y^2}$. Donc $f(x,y) \xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{} 0$.
2. $f(x,y) = \dfrac{y}{x^2+y^3}$
$$f(r\cos\theta, r\sin\theta) = \frac{r\sin\theta}{r^2(\cos^2\theta + r\sin^3\theta)} = \frac{1}{r}\frac{\sin\theta}{\cos^2\theta + r\sin^3\theta}$$
Fixons $\theta$ tel que $\sin\theta \neq 0$ (c'est-à-dire $\theta \neq 0 \pmod{\pi}$). Alors, lorsque $r \to 0$, $f(r\cos\theta, r\sin\theta)$ n'a pas de limite finie. En particulier, la fonction $(x,y) \mapsto f(x,y)$ n'a pas de limite finie en $(0,0)$.
3. $f(x,y) = \dfrac{xy}{x^2+y^2}$
$$f(r\cos\theta, r\sin\theta) = \frac{r^2\cos\theta\sin\theta}{r^2} = \cos\theta\sin\theta = \frac{1}{2}\sin(2\theta)$$
Pour $\theta$ fixé, la fonction $r \mapsto f(r\cos\theta, r\sin\theta)$ admet bien une limite $\ell(\theta) = \frac{1}{2}\sin(2\theta)$, lorsque $r \to 0$. Mais cette limite dépend de l'angle $\theta$ : si $\theta = 0$, $\ell(\theta) = 0$ ; par contre, si $\theta = \frac{\pi}{4}$, $\ell(\theta) = \frac{1}{2}$. Comme la limite dépend de l'angle, alors la fonction de deux variables $(x,y) \mapsto f(x,y)$ n'a pas de limite en $(0,0)$.

### 4.3. Un exemple

Cet exemple est assez subtil et peut être passé en première lecture.

**Remarque.**
Soit $\ell \in \mathbb{R}$. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction telle que, pour chaque $\theta$ fixé, $\lim_{r\to 0} f(r\cos\theta, r\sin\theta) = \ell$. Peut-on en conclure que $f$ admet $\ell$ pour limite au point $(0,0)$ ? La réponse est non !
Autrement dit, regarder la limite de $f$ le long des rayons ne permet pas de trouver la limite de $f$ à l'origine.

Attention : la différence entre cette remarque et la proposition 3 est subtile. Dans la proposition 3, on a une hypothèse en terme de limites du type :

$$\forall \epsilon \quad \exists r_0 \quad \forall r < r_0 \quad \forall \theta \qquad \cdots$$

alors que dans la remarque, on note que l'hypothèse (plus faible) suivante est insuffisante :

$$\forall \theta \quad \forall \epsilon \quad \exists r_0 \quad \forall r < r_0 \quad \ldots$$

**Exemple 20.**
Soit la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ par

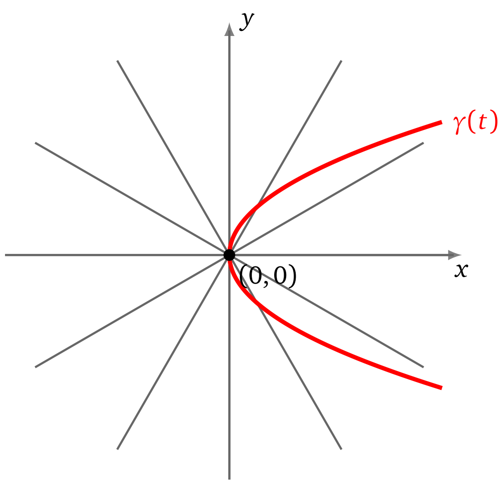
$$f(x,y) = \frac{xy^2}{x^2+y^4}.$$

1. Le long de tous les rayons $f$ tend vers 0, c'est-à-dire, pour $\theta$ fixé,
$$f(r\cos\theta, r\sin\theta) \xrightarrow[r\to 0]{} 0.$$
2. Cependant, $f$ n'a pas de limite en $(0,0)$.

*Solution.*

1. Calculons d'abord :
$$f(r\cos\theta, r\sin\theta) = \frac{r\cos\theta\sin^2\theta}{\cos^2\theta + r^2\sin^4\theta}$$
Fixons $\theta$ et discutons selon sa valeur :
   - Si $\cos\theta \neq 0$, alors le numérateur tend vers 0, tandis que le dénominateur tend vers $\cos^2\theta \neq 0$. Donc $f(r\cos\theta, r\sin\theta) \to 0$ lorsque $r \to 0$.
   - Si $\cos\theta = 0$, alors on se trouve sur des points $(x,y)$ où $x=0$ et donc $f(r\cos\theta, r\sin\theta) = f(0,y) = 0$.

   Dans tous les cas, $f$ tend vers 0 sur tous les rayons définis par un angle $\theta$ fixé.
2. Considérons le chemin $\gamma(t) = (t^2, t)$. Alors
$$(f\circ\gamma)(t) = \frac{t^4}{2t^4} = \frac{1}{2}.$$
Mais on a vu que le long des rayons $f$ tend vers 0. Cela contredit l'existence d'une limite pour $f(x,y)$ en $(0,0)$.



**Mini-exercices.**

1. Calculer l'angle $\theta$ des coordonnées polaires $[r:\theta]$ d'un point $(x,y)$ dans le cas $x>0$, $y<0$. Puis faire les cas où $x<0$.
2. La fonction $f$ définie par $f(x,y)=\frac{(2x+3y)^3}{x^2+y^2}$ admet-elle une limite au point $(0,0)$ ? Même question avec $f(x,y)=\frac{(2x+3y)^2}{x^2+y^2}$, puis $f(x,y)=\frac{2x+3y}{x^2+y^2}$.

**Auteurs du chapitre**

Arnaud Bodin. D'après des cours de Abdellah Hanani (Lille), Goulwen Fichou et Stéphane Leborgne (Rennes), Laurent Pujo-Menjouet (Lyon). Relu par Anne Bauval, Vianney Combet et Barbara Tumpach.