

Limites et fonctions continues

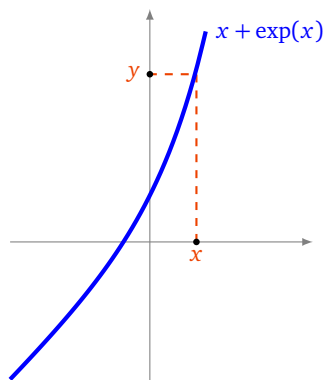
- Vidéo ■ partie 1. Notions de fonction
- Vidéo ■ partie 2. Limites
- Vidéo ■ partie 3. Continuité en un point
- Vidéo ■ partie 4. Continuité sur un intervalle
- Vidéo ■ partie 5. Fonctions monotones et bijections
- Fiche d'exercices ♦ Limites de fonctions
- Fiche d'exercices ♦ Fonctions continues

Motivation

Les équations en une variable x qu'on sait résoudre explicitement, c'est-à-dire en donnant une formule pour la solution, sont très particulières : par exemple les équations du premier degré $ax + b = 0$, celles du second degré $ax^2 + bx + c = 0$. Mais pour la plupart des équations, il n'est pas possible de donner une formule pour la ou les solutions. En fait il n'est même pas évident de déterminer seulement le nombre de solutions, ni même s'il en existe. Considérons par exemple l'équation extrêmement simple :

$$x + \exp x = 0$$

Il n'y a pas de formule explicite (utilisant des sommes, des produits, des fonctions usuelles) pour trouver la solution x . Dans ce chapitre nous allons voir que grâce à l'étude de la fonction $f(x) = x + \exp x$, il est possible d'obtenir beaucoup d'informations sur l'ensemble des solutions de l'équation $x + \exp x = 0$, et même de l'équation plus générale $x + \exp x = y$ (où $y \in \mathbb{R}$ est fixé).



Nous serons capables de prouver que pour chaque $y \in \mathbb{R}$ l'équation « $x + \exp x = y$ » admet une solution x , que cette solution est unique, et nous saurons dire comment varie x en fonction de y . Le point clé de cette résolution est l'étude de la fonction f et en particulier de sa continuité. Même s'il n'est pas possible de trouver l'expression exacte de la solution x en fonction de y , nous allons mettre en place les outils théoriques qui permettent d'en trouver une solution approchée.

1. Notions de fonction

1.1. Définitions

Définition 1.

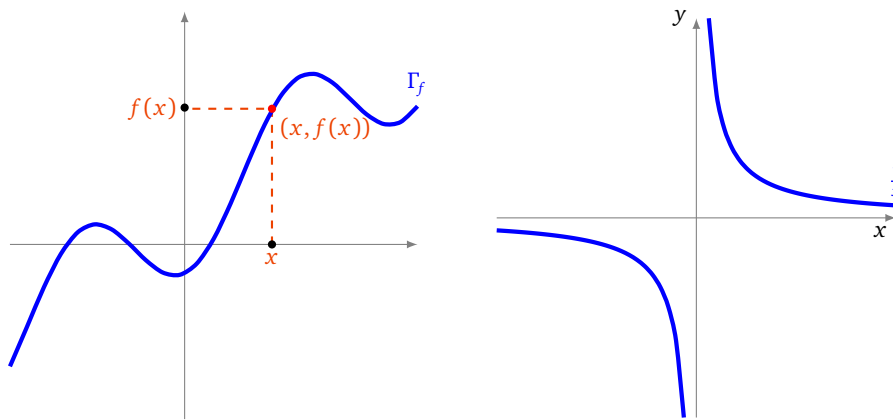
Une **fonction** d'une variable réelle à valeurs réelles est une application $f : U \rightarrow \mathbb{R}$, où U est une partie de \mathbb{R} . En général, U est un intervalle ou une réunion d'intervalles. On appelle U le **domaine de définition** de la fonction f .

Exemple 1.

La fonction inverse :

$$\begin{array}{ccc} f :]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \frac{1}{x}. \end{array}$$

Le **graphe** d'une fonction $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ est la partie Γ_f de \mathbb{R}^2 définie par $\Gamma_f = \{(x, f(x)) \mid x \in U\}$.
Le graphe d'une fonction (à gauche), l'exemple du graphe de $x \mapsto \frac{1}{x}$ (à droite).

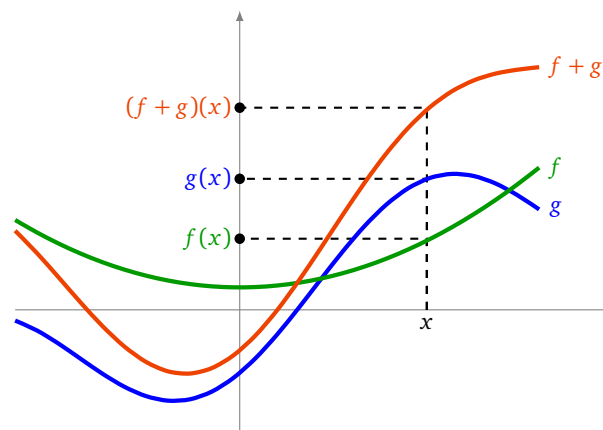


1.2. Opérations sur les fonctions

Soient $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ et $g : U \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions définies sur une même partie U de \mathbb{R} . On peut alors définir les fonctions suivantes :

- la **somme** de f et g est la fonction $f + g : U \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$ pour tout $x \in U$;
- le **produit** de f et g est la fonction $f \times g : U \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $(f \times g)(x) = f(x) \times g(x)$ pour tout $x \in U$;
- la **multiplication par un scalaire** $\lambda \in \mathbb{R}$ de f est la fonction $\lambda \cdot f : U \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $(\lambda \cdot f)(x) = \lambda \cdot f(x)$ pour tout $x \in U$.

Comment tracer le graphe d'une somme de fonction ?



1.3. Fonctions majorées, minorées, bornées

Définition 2.

Soient $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ et $g : U \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions. Alors :

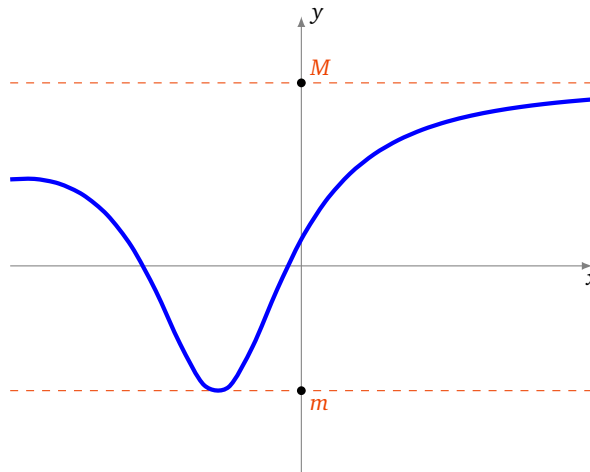
- $f \geq g$ si $\forall x \in U \quad f(x) \geq g(x)$;
- $f \geq 0$ si $\forall x \in U \quad f(x) \geq 0$;
- $f > 0$ si $\forall x \in U \quad f(x) > 0$;
- f est dite **constante** sur U si $\exists a \in \mathbb{R} \quad \forall x \in U \quad f(x) = a$;
- f est dite **nulle** sur U si $\forall x \in U \quad f(x) = 0$.

Définition 3.

Soit $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction. On dit que :

- f est **majorée** sur U si $\exists M \in \mathbb{R} \quad \forall x \in U \quad f(x) \leq M$;
- f est **minorée** sur U si $\exists m \in \mathbb{R} \quad \forall x \in U \quad f(x) \geq m$;
- f est **bornée** sur U si f est à la fois majorée et minorée sur U , c'est-à-dire si $\exists M \in \mathbb{R} \quad \forall x \in U \quad |f(x)| \leq M$.

Voici le graphe d'une fonction bornée (minorée par m et majorée par M).



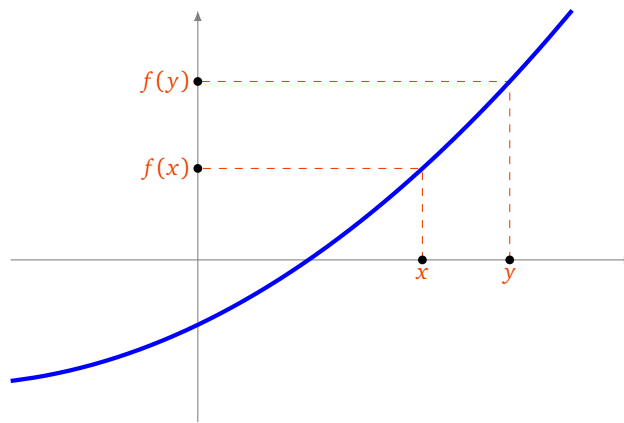
1.4. Fonctions croissantes, décroissantes

Définition 4.

Soit $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction. On dit que :

- f est **croissante** sur U si $\forall x, y \in U \quad x \leq y \implies f(x) \leq f(y)$
- f est **strictement croissante** sur U si $\forall x, y \in U \quad x < y \implies f(x) < f(y)$
- f est **décroissante** sur U si $\forall x, y \in U \quad x \leq y \implies f(x) \geq f(y)$
- f est **strictement décroissante** sur U si $\forall x, y \in U \quad x < y \implies f(x) > f(y)$
- f est **monotone** (resp. **strictement monotone**) sur U si f est croissante ou décroissante (resp. strictement croissante ou strictement décroissante) sur U .

Un exemple de fonction croissante (et même strictement croissante) :

**Exemple 2.**

- La fonction racine carrée $\begin{cases} [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \sqrt{x} \end{cases}$ est strictement croissante.
- Les fonctions exponentielle $\exp : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ et logarithme $\ln :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ sont strictement croissantes.
- La fonction valeur absolue $\begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto |x| \end{cases}$ n'est ni croissante, ni décroissante. Par contre, la fonction $\begin{cases} [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto |x| \end{cases}$ est strictement croissante.

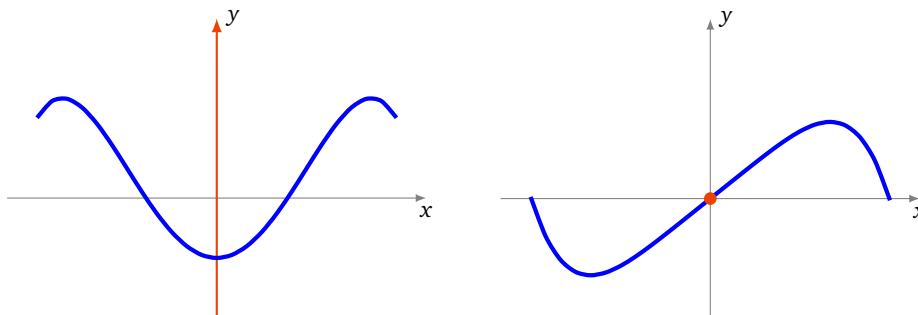
1.5. Parité et périodicité**Définition 5.**

Soit I un intervalle de \mathbb{R} symétrique par rapport à 0 (c'est-à-dire de la forme $] -a, a[$ ou $[-a, a]$ ou \mathbb{R}). Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie sur cet intervalle. On dit que :

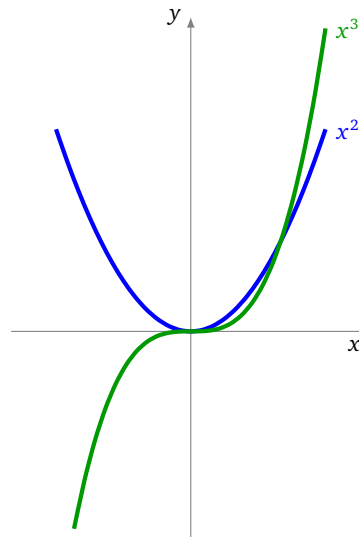
- f est **paire** si $\forall x \in I \quad f(-x) = f(x)$,
- f est **impaire** si $\forall x \in I \quad f(-x) = -f(x)$.

Interprétation graphique :

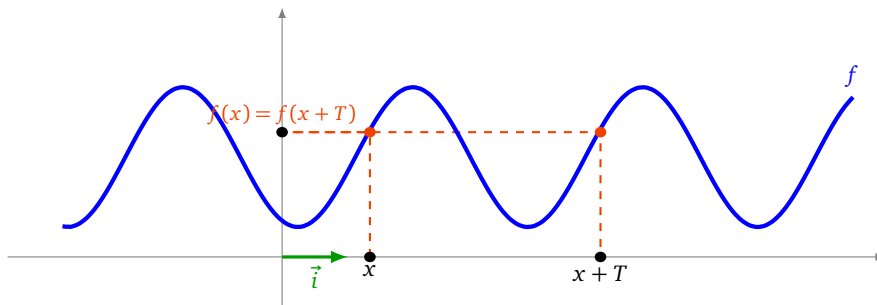
- f est paire si et seulement si son graphe est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées (figure de gauche).
- f est impaire si et seulement si son graphe est symétrique par rapport à l'origine (figure de droite).

**Exemple 3.**

- La fonction définie sur \mathbb{R} par $x \mapsto x^{2n}$ ($n \in \mathbb{N}$) est paire.
- La fonction définie sur \mathbb{R} par $x \mapsto x^{2n+1}$ ($n \in \mathbb{N}$) est impaire.
- La fonction $\cos : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est paire. La fonction $\sin : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est impaire.

**Définition 6.**

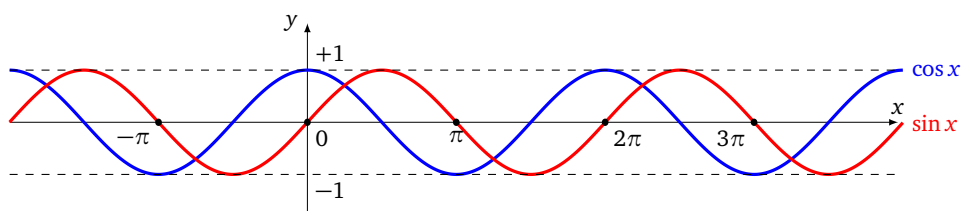
Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction et T un nombre réel, $T > 0$. La fonction f est dite **périodique** de période T si $\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x+T) = f(x)$.



Interprétation graphique : f est périodique de période T si et seulement si son graphe est invariant par la translation de vecteur $T\vec{i}$, où \vec{i} est le premier vecteur de coordonnées.

Exemple 4.

Les fonctions sinus et cosinus sont 2π -périodiques. La fonction tangente est π -périodique.

**Mini-exercices.**

1. Soit $U =]-\infty, 0[$ et $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = 1/x$. f est-elle monotone ? Et sur $U =]0, +\infty[$? Et sur $U =]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$?
2. Pour deux fonctions paires que peut-on dire sur la parité de la somme ? du produit ? et de la composée ? Et pour deux fonctions impaires ? Et si l'une est paire et l'autre impaire ?
3. On note $\{x\} = x - E(x)$ la partie fractionnaire de x . Tracer le graphe de la fonction $x \mapsto \{x\}$ et montrer qu'elle est périodique.
4. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$. Montrer que $|f|$ est majorée par $\frac{1}{2}$, étudier les variations de f (sans utiliser de dérivée) et tracer son graphe.
5. On considère la fonction $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = \sin(\pi f(x))$, où f est définie à la question précédente. Dédurre de l'étude de f les variations, la parité, la périodicité de g et tracer son graphe.

2. Limites

2.1. Définitions

Limite en un point

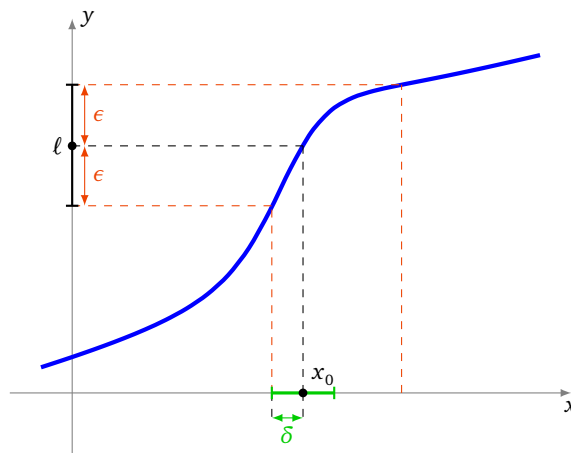
Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie sur un intervalle I de \mathbb{R} . Soit $x_0 \in \mathbb{R}$ un point de I ou une extrémité de I .

Définition 7.

Soit $\ell \in \mathbb{R}$. On dit que f a pour limite ℓ en x_0 si

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in I \quad |x - x_0| < \delta \implies |f(x) - \ell| < \epsilon$$

On dit aussi que $f(x)$ tend vers ℓ lorsque x tend vers x_0 . On note alors $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell$ ou bien $\lim_{x_0} f = \ell$.



Remarque.

- L'inégalité $|x - x_0| < \delta$ équivaut à $x \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$. L'inégalité $|f(x) - \ell| < \epsilon$ équivaut à $f(x) \in]\ell - \epsilon, \ell + \epsilon[$.
- On peut remplacer certaines inégalités strictes « $<$ » par des inégalités larges « \leq » dans la définition : $\forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in I \quad |x - x_0| \leq \delta \implies |f(x) - \ell| \leq \epsilon$
- Dans la définition de la limite

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in I \quad |x - x_0| < \delta \implies |f(x) - \ell| < \epsilon$$

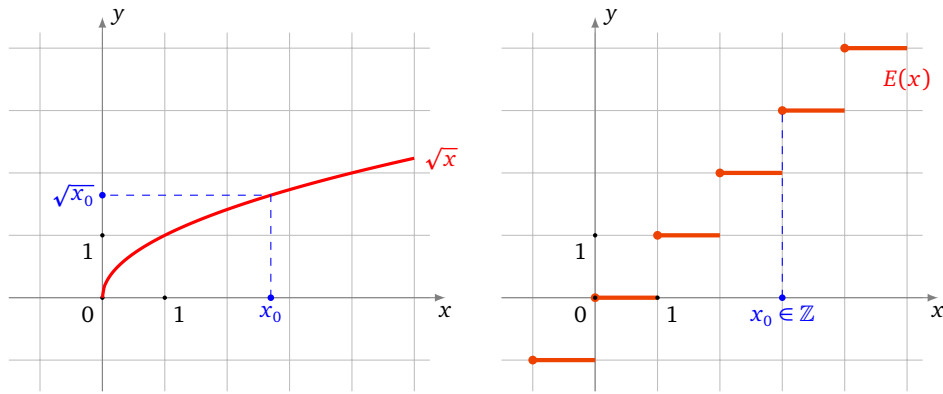
le quantificateur $\forall x \in I$ n'est là que pour être sûr que l'on puisse parler de $f(x)$. Il est souvent omis et l'existence de la limite s'écrit alors juste :

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad |x - x_0| < \delta \implies |f(x) - \ell| < \epsilon.$$

- N'oubliez pas que l'ordre des quantificateurs est important, on ne peut pas échanger le $\forall \epsilon$ avec le $\exists \delta$: le δ dépend en général du ϵ . Pour marquer cette dépendance on peut écrire : $\forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta(\epsilon) > 0 \dots$

Exemple 5.

- $\lim_{x \rightarrow x_0} \sqrt{x} = \sqrt{x_0}$ pour tout $x_0 \geq 0$,
- la fonction partie entière E n'a pas de limite aux points $x_0 \in \mathbb{Z}$.



Soit f une fonction définie sur un ensemble de la forme $]a, x_0[\cup]x_0, b[$.

Définition 8.

- On dit que f a pour limite $+\infty$ en x_0 si

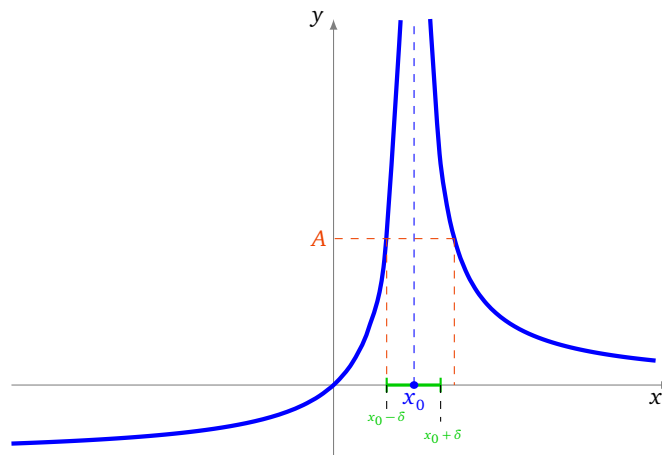
$$\forall A > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in I \quad |x - x_0| < \delta \implies f(x) > A$$

On note alors $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$.

- On dit que f a pour limite $-\infty$ en x_0 si

$$\forall A > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in I \quad |x - x_0| < \delta \implies f(x) < -A$$

On note alors $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty$.



Limite en l'infini

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie sur un intervalle de la forme $I =]a, +\infty[$.

Définition 9.

- Soit $l \in \mathbb{R}$. On dit que f a pour limite l en $+\infty$ si

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists B > 0 \quad \forall x \in I \quad x > B \implies |f(x) - l| < \epsilon$$

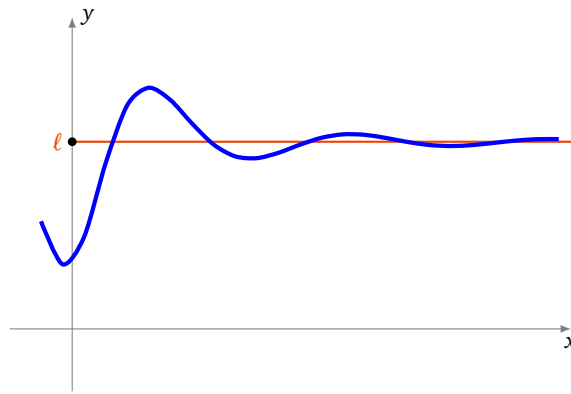
On note alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l$ ou $\lim_{+\infty} f = l$.

- On dit que f a pour limite $+\infty$ en $+\infty$ si

$$\forall A > 0 \quad \exists B > 0 \quad \forall x \in I \quad x > B \implies f(x) > A$$

On note alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

On définirait de la même manière la limite en $-\infty$ pour des fonctions définies sur les intervalles du type $] -\infty, a[$.



Exemple 6.

On a les limites classiques suivantes pour tout $n \geq 1$:

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^n = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^n = \begin{cases} +\infty & \text{si } n \text{ est pair} \\ -\infty & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{x^n}\right) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{1}{x^n}\right) = 0$.

Exemple 7.

Soit $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ avec $a_n > 0$ et $Q(x) = b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \dots + b_1 x + b_0$ avec $b_m > 0$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = \begin{cases} +\infty & \text{si } n > m \\ \frac{a_n}{b_m} & \text{si } n = m \\ 0 & \text{si } n < m \end{cases}$$

Limite à gauche et à droite

Soit f une fonction définie sur un ensemble de la forme $]a, x_0[\cup]x_0, b[$.

Définition 10.

- On appelle **limite à droite** en x_0 de f la limite de la fonction $f|_{]x_0, b[}$ en x_0 et on la note $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f$.
- On définit de même la **limite à gauche** en x_0 de f : la limite de la fonction $f|_{]a, x_0[}$ en x_0 et on la note $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f$.
- On note aussi $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$ pour la limite à droite et $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$ pour la limite à gauche.

Dire que $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ admet une limite $\ell \in \mathbb{R}$ à droite en x_0 signifie donc :

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad x_0 < x < x_0 + \delta \implies |f(x) - \ell| < \epsilon$$

Si la fonction f a une limite en x_0 , alors ses limites à gauche et à droite en x_0 coïncident et valent $\lim_{x \rightarrow x_0} f$.

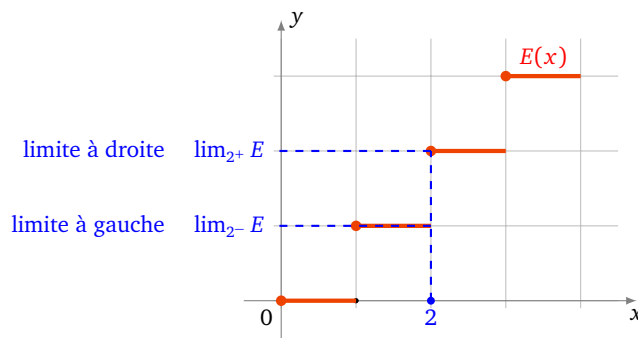
Réciproquement, si f a une limite à gauche et une limite à droite en x_0 et si ces limites valent $f(x_0)$ (si f est bien définie en x_0) alors f admet une limite en x_0 .

Exemple 8.

Considérons la fonction partie entière au point $x = 2$:

- comme pour tout $x \in]2, 3[$ on a $E(x) = 2$, on a $\lim_{x \rightarrow 2^+} E = 2$,
- comme pour tout $x \in [1, 2[$ on a $E(x) = 1$, on a $\lim_{x \rightarrow 2^-} E = 1$.

Ces deux limites étant différentes, on en déduit que E n'a pas de limite en 2.



2.2. Propriétés

Proposition 1.

Si une fonction admet une limite, alors cette limite est unique.

On ne donne pas la démonstration de cette proposition, qui est très similaire à celle de l'unicité de la limite pour les suites (un raisonnement par l'absurde).

Soient deux fonctions f et g . On suppose que x_0 est un réel, ou que $x_0 = \pm\infty$.

Proposition 2.

Si $\lim_{x_0} f = \ell \in \mathbb{R}$ et $\lim_{x_0} g = \ell' \in \mathbb{R}$, alors :

- $\lim_{x_0} (\lambda \cdot f) = \lambda \cdot \ell$ pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$
- $\lim_{x_0} (f + g) = \ell + \ell'$
- $\lim_{x_0} (f \times g) = \ell \times \ell'$
- si $\ell \neq 0$, alors $\lim_{x_0} \frac{1}{f} = \frac{1}{\ell}$

De plus, si $\lim_{x_0} f = +\infty$ (ou $-\infty$) alors $\lim_{x_0} \frac{1}{f} = 0$.

Cette proposition se montre de manière similaire à la proposition analogue sur les limites de suites. Nous n'allons donc pas donner la démonstration de tous les résultats.

Démonstration. Montrons par exemple que si f tend en x_0 vers une limite ℓ non nulle, alors $\frac{1}{f}$ est bien définie dans un voisinage de x_0 et tend vers $\frac{1}{\ell}$.

Supposons $\ell > 0$, le cas $\ell < 0$ se montrerait de la même manière. Montrons tout d'abord que $\frac{1}{f}$ est bien définie et est bornée dans un voisinage de x_0 contenu dans l'intervalle I . Par hypothèse

$$\forall \epsilon' > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in I \quad x_0 - \delta < x < x_0 + \delta \implies \ell - \epsilon' < f(x) < \ell + \epsilon'.$$

Si on choisit ϵ' tel que $0 < \epsilon' < \ell/2$, alors on voit qu'il existe un intervalle $J = I \cap]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$ tel que pour tout x dans J , $f(x) > \ell/2 > 0$, c'est-à-dire, en posant $M = 2/\ell$:

$$\forall x \in J \quad 0 < \frac{1}{f(x)} < M.$$

Fixons à présent $\epsilon > 0$. Pour tout $x \in J$, on a

$$\left| \frac{1}{f(x)} - \frac{1}{\ell} \right| = \frac{|\ell - f(x)|}{f(x)\ell} < \frac{M}{\ell} |\ell - f(x)|.$$

Donc, si dans la définition précédente de la limite de f en x_0 on choisit $\epsilon' = \frac{\ell\epsilon}{M}$, alors on trouve qu'il existe un $\delta > 0$ tel que

$$\forall x \in J \quad x_0 - \delta < x < x_0 + \delta \implies \left| \frac{1}{f(x)} - \frac{1}{\ell} \right| < \frac{M}{\ell} |\ell - f(x)| < \frac{M}{\ell} \epsilon' = \epsilon.$$

□

Proposition 3.

Si $\lim_{x_0} f = \ell$ et $\lim_{\ell} g = \ell'$, alors $\lim_{x_0} g \circ f = \ell'$.

Ce sont des propriétés que l'on utilise sans s'en apercevoir !

Exemple 9.

Soit $x \mapsto u(x)$ une fonction et $x_0 \in \mathbb{R}$ tel que $u(x) \rightarrow 2$ lorsque $x \rightarrow x_0$. Posons $f(x) = \sqrt{1 + \frac{1}{u(x)^2} + \ln u(x)}$. Si elle existe, quelle est la limite de f en x_0 ?

- Tout d'abord comme $u(x) \rightarrow 2$ alors $u(x)^2 \rightarrow 4$ donc $\frac{1}{u(x)^2} \rightarrow \frac{1}{4}$ (lorsque $x \rightarrow x_0$).
- De même comme $u(x) \rightarrow 2$ alors, dans un voisinage de x_0 , $u(x) > 0$ donc $\ln u(x)$ est bien définie dans ce voisinage et de plus $\ln u(x) \rightarrow \ln 2$ (lorsque $x \rightarrow x_0$).
- Cela entraîne que $1 + \frac{1}{u(x)^2} + \ln u(x) \rightarrow 1 + \frac{1}{4} + \ln 2$ lorsque $x \rightarrow x_0$. En particulier $1 + \frac{1}{u(x)^2} + \ln u(x) \geq 0$ dans un voisinage de x_0 , donc $f(x)$ est bien définie dans un voisinage de x_0 .
- Et par composition avec la racine carrée alors $f(x)$ a bien une limite en x_0 et $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \sqrt{1 + \frac{1}{4} + \ln 2}$.

Il y a des situations où l'on ne peut rien dire sur les limites. Par exemple si $\lim_{x_0} f = +\infty$ et $\lim_{x_0} g = -\infty$ alors on ne peut à priori rien dire sur la limite de $f + g$ (cela dépend vraiment de f et de g). On raccourci cela en $+\infty - \infty$ est une **forme indéterminée**.

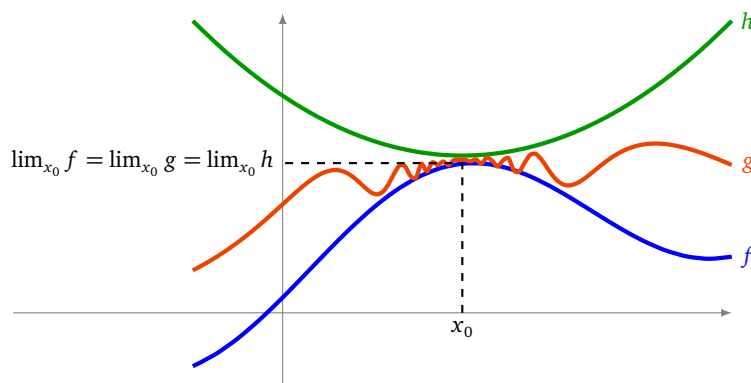
Voici une liste de formes indéterminées : $+\infty - \infty$; $0 \times \infty$; $\frac{\infty}{\infty}$; $\frac{0}{0}$; 1^∞ ; ∞^0 .

Enfin voici une proposition très importante qui signifie qu'on peut passer à la limite dans une inégalité large.

Proposition 4.

- Si $f \leq g$ et si $\lim_{x_0} f = \ell \in \mathbb{R}$ et $\lim_{x_0} g = \ell' \in \mathbb{R}$, alors $\ell \leq \ell'$.
- Si $f \leq g$ et si $\lim_{x_0} f = +\infty$, alors $\lim_{x_0} g = +\infty$.
- Théorème des gendarmes

Si $f \leq g \leq h$ et si $\lim_{x_0} f = \lim_{x_0} h = \ell \in \mathbb{R}$, alors g a une limite en x_0 et $\lim_{x_0} g = \ell$.

**Mini-exercices.**

1. Déterminer, si elle existe, la limite de $\frac{2x^2 - x - 2}{3x^2 + 2x + 2}$ en 0. Et en $+\infty$?
2. Déterminer, si elle existe, la limite de $\sin\left(\frac{1}{x}\right)$ en $+\infty$. Et pour $\frac{\cos x}{\sqrt{x}}$?
3. En utilisant la définition de la limite (avec des ϵ), montrer que $\lim_{x \rightarrow 2} (3x + 1) = 7$.
4. Montrer que si f admet une limite finie en x_0 alors il existe $\delta > 0$ tel que f soit bornée sur $]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$.
5. Déterminer, si elle existe, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1+x^2}}{x}$. Et $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x^2 - 3x + 2}$?

3. Continuité en un point

3.1. Définition

Soit I un intervalle de \mathbb{R} et $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction.

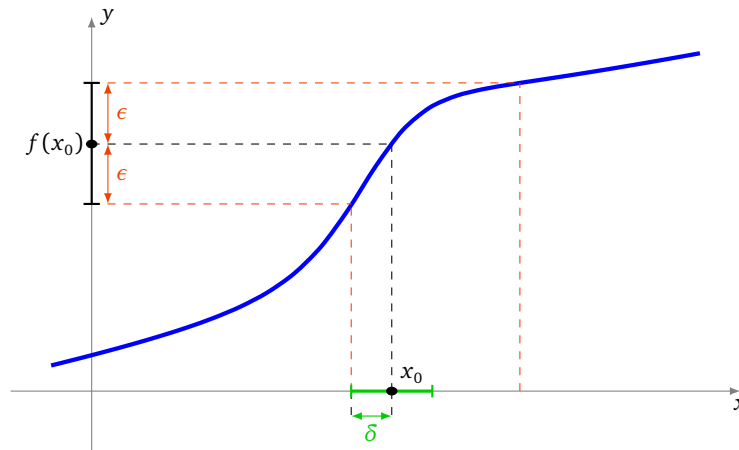
Définition 11.

- On dit que f est **continue en un point** $x_0 \in I$ si

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in I \quad |x - x_0| < \delta \implies |f(x) - f(x_0)| < \epsilon$$

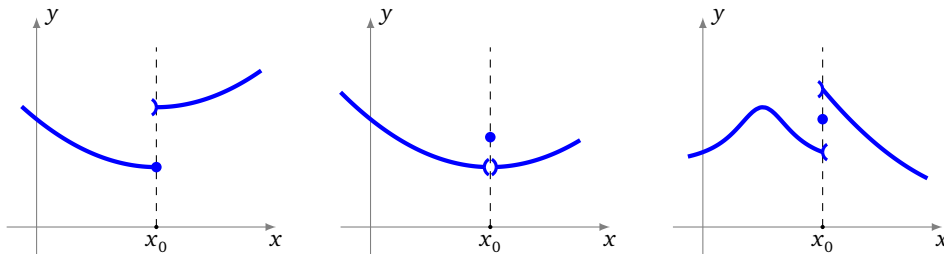
c'est-à-dire si f admet une limite en x_0 (cette limite vaut alors nécessairement $f(x_0)$).

- On dit que f est **continue sur I** si f est continue en tout point de I .



Intuitivement, une fonction est continue sur un intervalle, si on peut tracer son graphe « sans lever le crayon », c'est-à-dire si sa courbe représentative n'admet pas de saut.

Voici des fonctions qui ne sont pas continues en x_0 :



Exemple 10.

Les fonctions suivantes sont continues :

- une fonction constante sur un intervalle,
- la fonction racine carrée $x \mapsto \sqrt{x}$ sur $[0, +\infty[$,
- les fonctions sin et cos sur \mathbb{R} ,
- la fonction valeur absolue $x \mapsto |x|$ sur \mathbb{R} ,
- la fonction exp sur \mathbb{R} ,
- la fonction ln sur $]0, +\infty[$.

Par contre, la fonction partie entière E n'est pas continue aux points $x_0 \in \mathbb{Z}$, puisqu'elle n'admet pas de limite en ces points. Pour $x_0 \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, elle est continue en x_0 .

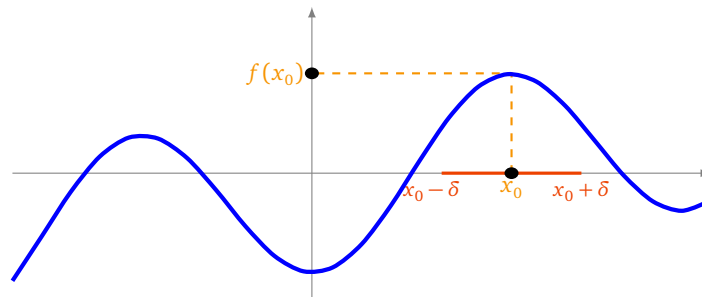
3.2. Propriétés

La continuité assure par exemple que si la fonction n'est pas nulle en un point (qui est une propriété ponctuelle) alors elle n'est pas nulle autour de ce point (propriété locale). Voici l'énoncé :

Lemme 1.

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie sur un intervalle I et x_0 un point de I . Si f est continue en x_0 et si $f(x_0) \neq 0$, alors il existe $\delta > 0$ tel que

$$\forall x \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\quad f(x) \neq 0$$



Démonstration. Supposons par exemple que $f(x_0) > 0$, le cas $f(x_0) < 0$ se montrerait de la même manière. Écrivons ainsi la définition de la continuité de f en x_0 :

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in I \quad x \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\implies f(x_0) - \epsilon < f(x) < f(x_0) + \epsilon.$$

Il suffit donc de choisir ϵ tel que $0 < \epsilon < f(x_0)$. Il existe alors bien un intervalle $J = I \cap]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$ tel que pour tout x dans J , on a $f(x) > 0$. \square

La continuité se comporte bien avec les opérations élémentaires. Les propositions suivantes sont des conséquences immédiates des propositions analogues sur les limites.

Proposition 5.

Soient $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions continues en un point $x_0 \in I$. Alors

- $\lambda \cdot f$ est continue en x_0 (pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$),
- $f + g$ est continue en x_0 ,
- $f \times g$ est continue en x_0 ,
- si $f(x_0) \neq 0$, alors $\frac{1}{f}$ est continue en x_0 .

Exemple 11.

La proposition précédente permet de vérifier que d'autres fonctions usuelles sont continues :

- les fonctions puissance $x \mapsto x^n$ sur \mathbb{R} (comme produit $x \times x \times \dots$),
- les polynômes sur \mathbb{R} (somme et produit de fonctions puissance et de fonctions constantes),
- les fractions rationnelles $x \mapsto \frac{P(x)}{Q(x)}$ sur tout intervalle où le polynôme $Q(x)$ ne s'annule pas.

La composition conserve la continuité (mais il faut faire attention en quels points les hypothèses s'appliquent).

Proposition 6.

Soient $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ et $g : J \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions telles que $f(I) \subset J$. Si f est continue en un point $x_0 \in I$ et si g est continue en $f(x_0)$, alors $g \circ f$ est continue en x_0 .

3.3. Prolongement par continuité

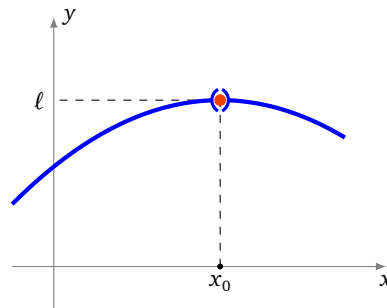
Définition 12.

Soit I un intervalle, x_0 un point de I et $f : I \setminus \{x_0\} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction.

- On dit que f est **prolongeable par continuité** en x_0 si f admet une limite finie en x_0 . Notons alors $\ell = \lim_{x_0} f$.
- On définit alors la fonction $\tilde{f} : I \rightarrow \mathbb{R}$ en posant pour tout $x \in I$

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \neq x_0 \\ \ell & \text{si } x = x_0. \end{cases}$$

Alors \tilde{f} est continue en x_0 et on l'appelle le **prolongement par continuité** de f en x_0 .



Dans la pratique, on continuera souvent à noter f à la place de \tilde{f} .

Exemple 12.

Considérons la fonction f définie sur \mathbb{R}^* par $f(x) = x \sin\left(\frac{1}{x}\right)$. Voyons si f admet un prolongement par continuité en 0 ?

Comme pour tout $x \in \mathbb{R}^*$ on a $|f(x)| \leq |x|$, on en déduit que f tend vers 0 en 0. Elle est donc prolongeable par continuité en 0 et son prolongement est la fonction \tilde{f} définie sur \mathbb{R} tout entier par :

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} x \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

3.4. Suites et continuité

Proposition 7.

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction et x_0 un point de I . Alors :

$$f \text{ est continue en } x_0 \iff \begin{array}{l} \text{pour toute suite } (u_n) \text{ qui converge vers } x_0 \\ \text{la suite } (f(u_n)) \text{ converge vers } f(x_0) \end{array}$$

Démonstration.

\implies On suppose que f est continue en x_0 et que (u_n) est une suite qui converge vers x_0 et on veut montrer que $(f(u_n))$ converge vers $f(x_0)$.

Soit $\epsilon > 0$. Comme f est continue en x_0 , il existe un $\delta > 0$ tel que

$$\forall x \in I \quad |x - x_0| < \delta \implies |f(x) - f(x_0)| < \epsilon.$$

Pour ce δ , comme (u_n) converge vers x_0 , il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad n \geq N \implies |u_n - x_0| < \delta.$$

On en déduit que, pour tout $n \geq N$, comme $|u_n - x_0| < \delta$, on a $|f(u_n) - f(x_0)| < \epsilon$. Comme c'est vrai pour tout $\epsilon > 0$, on peut maintenant conclure que $(f(u_n))$ converge vers $f(x_0)$.

\impliedby On va montrer la contraposée : supposons que f n'est pas continue en x_0 et montrons qu'alors il existe une suite (u_n) qui converge vers x_0 et telle que $(f(u_n))$ ne converge pas vers $f(x_0)$.

Par hypothèse, comme f n'est pas continue en x_0 :

$$\exists \epsilon_0 > 0 \quad \forall \delta > 0 \quad \exists x_\delta \in I \quad \text{tel que } |x_\delta - x_0| < \delta \text{ et } |f(x_\delta) - f(x_0)| > \epsilon_0.$$

On construit la suite (u_n) de la façon suivante : pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on choisit dans l'assertion précédente $\delta = 1/n$ et on obtient qu'il existe u_n (qui est $x_{1/n}$) tel que

$$|u_n - x_0| < \frac{1}{n} \quad \text{et} \quad |f(u_n) - f(x_0)| > \epsilon_0.$$

La suite (u_n) converge vers x_0 alors que la suite $(f(u_n))$ ne peut pas converger vers $f(x_0)$. □

Remarque.

On retiendra surtout l'implication : si f est continue sur I et si (u_n) est une suite convergente de limite ℓ , alors $(f(u_n))$ converge vers $f(\ell)$. On l'utilisera intensivement pour l'étude des suites récurrentes $u_{n+1} = f(u_n)$: si f est continue et $u_n \rightarrow \ell$, alors $f(\ell) = \ell$.

Mini-exercices.

- Déterminer le domaine de définition et de continuité des fonctions suivantes : $f(x) = 1/\sin x$, $g(x) = 1/\sqrt{x + \frac{1}{2}}$, $h(x) = \ln(x^2 + x - 1)$.
- Trouver les couples $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tels que la fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = ax + b$ si $x < 0$ et $f(x) = \exp(x)$ si $x \geq 0$ soit continue sur \mathbb{R} . Et si on avait $f(x) = \frac{a}{x-1} + b$ pour $x < 0$?
- Soit f une fonction continue telle que $f(x_0) = 1$. Montrer qu'il existe $\delta > 0$ tel que : pour tout $x \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$ $f(x) > \frac{1}{2}$.
- Étudier la continuité de $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par : $f(x) = \sin(x) \cos\left(\frac{1}{x}\right)$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 0$. Et pour $g(x) = xE(x)$?
- La fonction définie par $f(x) = \frac{x^3+8}{|x+2|}$ admet-elle un prolongement par continuité en -2 ?
- Soit la suite définie par $u_0 > 0$ et $u_{n+1} = \sqrt{u_n}$. Montrer que (u_n) admet une limite $\ell \in \mathbb{R}$ lorsque $n \rightarrow +\infty$. À l'aide de la fonction $f(x) = \sqrt{x}$ calculer cette limite.

4. Continuité sur un intervalle

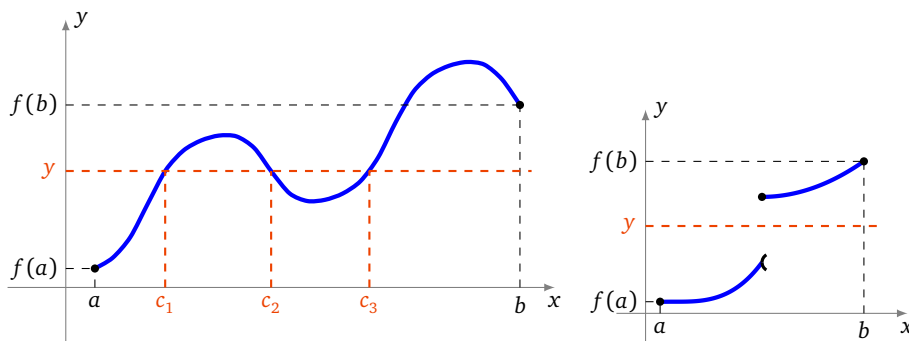
4.1. Le théorème des valeurs intermédiaires

Théorème 1 (Théorème des valeurs intermédiaires).

Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur un segment.

Pour tout réel y compris entre $f(a)$ et $f(b)$,
il existe $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = y$.

Une illustration du théorème des valeurs intermédiaires (figure de gauche), le réel c n'est pas nécessairement unique. De plus si la fonction n'est pas continue, le théorème n'est plus vrai (figure de droite).

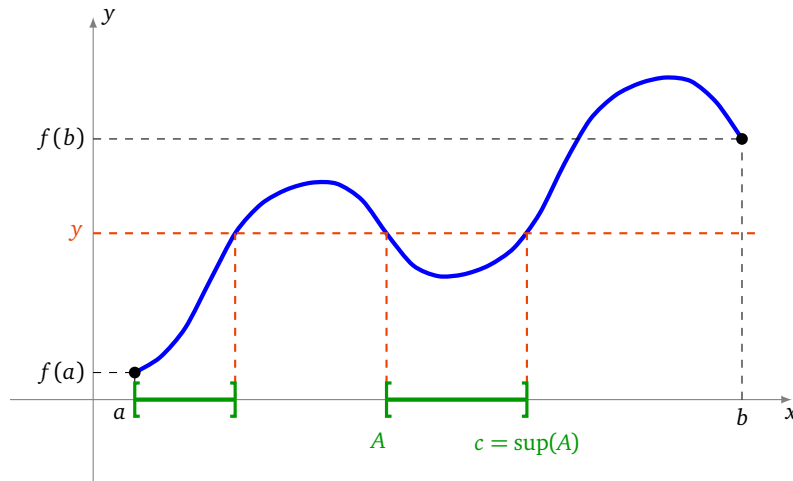


Démonstration. Montrons le théorème dans le cas où $f(a) < f(b)$. On considère alors un réel y tel que $f(a) \leq y \leq f(b)$ et on veut montrer qu'il a un antécédent par f .

- On introduit l'ensemble suivant

$$A = \{x \in [a, b] \mid f(x) \leq y\}.$$

Tout d'abord l'ensemble A est non vide (car $a \in A$) et il est majoré (car il est contenu dans $[a, b]$) : il admet donc une borne supérieure, que l'on note $c = \sup A$. Montrons que $f(c) = y$.



2. Montrons tout d'abord que $f(c) \leq y$. Comme $c = \sup A$, il existe une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ contenue dans A telle que (u_n) converge vers c . D'une part, pour tout $n \in \mathbb{N}$, comme $u_n \in A$, on a $f(u_n) \leq y$. D'autre part, comme f est continue en c , la suite $(f(u_n))$ converge vers $f(c)$. On en déduit donc, par passage à la limite, que $f(c) \leq y$.
3. Montrons à présent que $f(c) \geq y$. Remarquons tout d'abord que si $c = b$, alors on a fini, puisque $f(b) \geq y$. Sinon, pour tout $x \in]c, b]$, comme $x \notin A$, on a $f(x) > y$. Or, étant donné que f est continue en c , f admet une limite à droite en c , qui vaut $f(c)$ et on obtient $f(c) \geq y$.

□

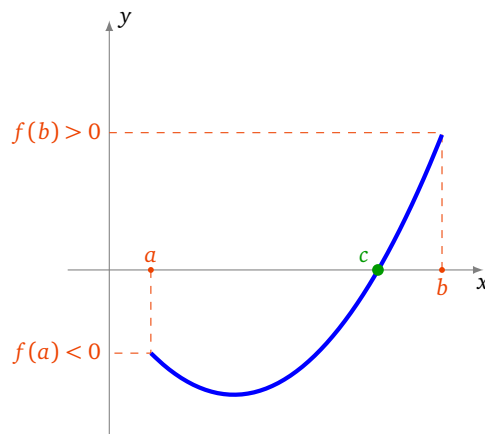
4.2. Applications du théorème des valeurs intermédiaires

Voici la version la plus utilisée du théorème des valeurs intermédiaires.

Corollaire 1.

Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur un segment.

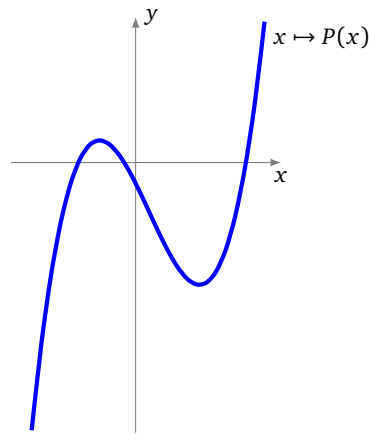
Si $f(a) \cdot f(b) < 0$, alors il existe $c \in]a, b[$ tel que $f(c) = 0$.



Démonstration. Il s'agit d'une application directe du théorème des valeurs intermédiaires avec $y = 0$. L'hypothèse $f(a) \cdot f(b) < 0$ signifiant que $f(a)$ et $f(b)$ sont de signes contraires. □

Exemple 13.

Tout polynôme de degré impair possède au moins une racine réelle.



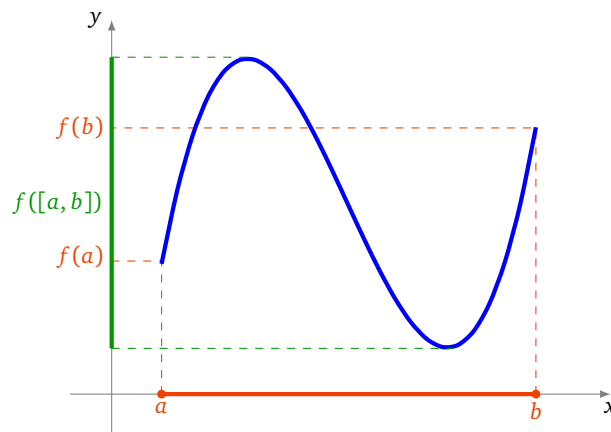
En effet, un tel polynôme s'écrit $P(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$ avec n un entier impair. On peut supposer que le coefficient a_n est strictement positif. Alors on a $\lim_{x \rightarrow -\infty} P = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} P = +\infty$. En particulier, il existe deux réels a et b tels que $f(a) < 0$ et $f(b) > 0$ et on conclut grâce au corollaire précédent.

Voici une formulation théorique du théorème des valeurs intermédiaires.

Corollaire 2.

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur un intervalle I .
Alors $f(I)$ est un intervalle.

Attention ! Il serait faux de croire que l'image par une fonction f de l'intervalle $[a, b]$ soit l'intervalle $[f(a), f(b)]$ (voir la figure ci-dessous).

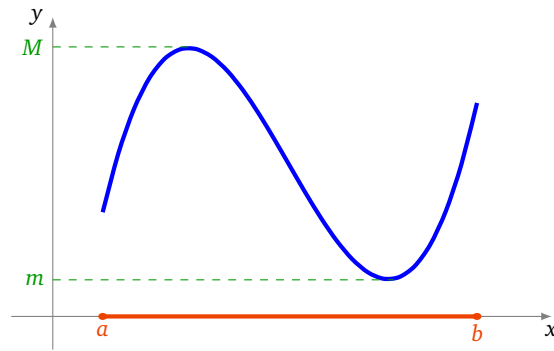


Démonstration. Soient $y_1, y_2 \in f(I)$, $y_1 \leq y_2$. Montrons que si $y \in [y_1, y_2]$, alors $y \in f(I)$. Par hypothèse, il existe $x_1, x_2 \in I$ tels que $y_1 = f(x_1)$, $y_2 = f(x_2)$ et donc y est compris entre $f(x_1)$ et $f(x_2)$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, comme f est continue, il existe donc $x \in I$ tel que $y = f(x)$, et ainsi $y \in f(I)$. \square

4.3. Fonctions continues sur un segment

Théorème 2.

Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur un segment. Alors il existe deux réels m et M tels que $f([a, b]) = [m, M]$. Autrement dit, l'image d'un segment par une fonction continue est un segment.



Comme on sait déjà par le théorème des valeurs intermédiaires que $f([a, b])$ est un intervalle, le théorème précédent signifie exactement que

Si f est continue sur $[a, b]$
alors f est bornée sur $[a, b]$, et elle atteint ses bornes.

Donc m est le minimum de la fonction sur l'intervalle $[a, b]$ alors que M est le maximum.

Démonstration.

1. Montrons d'abord que f est bornée.

- Pour $r \in \mathbb{R}$, on note $A_r = \{x \in [a, b] \mid f(x) \geq r\}$. Fixons r tel que $A_r \neq \emptyset$, comme $A_r \subset [a, b]$, le nombre $s = \sup A_r$ existe. Soit $x_n \rightarrow s$ avec $x_n \in A_r$. Par définition $f(x_n) \geq r$ donc, f étant continue, à la limite $f(s) \geq r$ et ainsi $s \in A_r$.
- Supposons par l'absurde que f ne soit pas bornée. Alors pour tout $n \geq 0$, A_n est non vide. Notons $s_n = \sup A_n$. Comme $f(x) \geq n+1$ implique $f(x) \geq n$ alors $A_{n+1} \subset A_n$, ce qui entraîne $s_{n+1} \leq s_n$. Bilan : (s_n) est une suite décroissante, minorée par a donc converge vers $\ell \in [a, b]$. Encore une fois f est continue donc $s_n \rightarrow \ell$, implique $f(s_n) \rightarrow f(\ell)$. Mais $f(s_n) \geq n$ donc $\lim f(s_n) = +\infty$. Cela contredit $\lim f(s_n) = f(\ell) < +\infty$. Conclusion : f est majorée.
- Un raisonnement tout à fait similaire prouve que f est aussi minorée, donc bornée. Par ailleurs on sait déjà que $f(I)$ est un intervalle (c'est le théorème des valeurs intermédiaires), donc maintenant $f(I)$ est un intervalle borné. Il reste à montrer qu'il du type $[m, M]$ (et pas $]m, M[$ par exemple).

2. Montrons maintenant que $f(I)$ est un intervalle fermé. Sachant déjà que $f(I)$ est un intervalle borné, notons m et M ses extrémités : $m = \inf f(I)$ et $M = \sup f(I)$. Supposons par l'absurde que $M \notin f(I)$. Alors pour $t \in [a, b]$, $M > f(t)$. La fonction $g : t \mapsto \frac{1}{M-f(t)}$ est donc bien définie. La fonction g est continue sur I donc d'après le premier point de cette preuve (appliqué à g) elle est bornée, disons par un réel K . Mais il existe $y_n \rightarrow M$, $y_n \in f(I)$. Donc il existe $x_n \in [a, b]$ tel que $y_n = f(x_n) \rightarrow M$ et alors $g(x_n) = \frac{1}{M-f(x_n)} \rightarrow +\infty$. Cela contredit que g soit une fonction bornée par K . Bilan : $M \in f(I)$. De même on a $m \in f(I)$. Conclusion finale : $f(I) = [m, M]$.

□

Mini-exercices.

1. Soient $P(x) = x^5 - 3x - 2$ et $f(x) = x2^x - 1$ deux fonctions définies sur \mathbb{R} . Montrer que l'équation $P(x) = 0$ a au moins une racine dans $[1, 2]$; l'équation $f(x) = 0$ a au moins une racine dans $[0, 1]$; l'équation $P(x) = f(x)$ a au moins une racine dans $]0, 2[$.
2. Montrer qu'il existe $x > 0$ tel que $2^x + 3^x = 7^x$.
3. Dessiner le graphe d'une fonction continue $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tel que $f(\mathbb{R}) = [0, 1]$. Puis $f(\mathbb{R}) =]0, 1[$; $f(\mathbb{R}) = [0, 1[$; $f(\mathbb{R}) =]-\infty, 1]$, $f(\mathbb{R}) =]-\infty, 1[$.
4. Soient $f, g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions continues. Quelles sont, parmi les fonctions suivantes, celles dont on peut affirmer qu'elles sont bornées : $f + g$, $f \times g$, f/g ?
5. Soient f et g deux fonctions continues sur $[0, 1]$ telles que $\forall x \in [0, 1] f(x) < g(x)$. Montrer qu'il existe $m > 0$ tel que $\forall x \in [0, 1] f(x) + m < g(x)$. Ce résultat est-il vrai si on remplace $[0, 1]$ par \mathbb{R} ?

5. Fonctions monotones et bijections

5.1. Rappels : injection, surjection, bijection

Dans cette section nous rappelons le matériel nécessaire concernant les applications bijectives.

Définition 13.

Soit $f : E \rightarrow F$ une fonction, où E et F sont des parties de \mathbb{R} .

- f est **injective** si $\forall x, x' \in E \quad f(x) = f(x') \implies x = x'$;
- f est **surjective** si $\forall y \in F \quad \exists x \in E \quad y = f(x)$;
- f est **bijjective** si f est à la fois injective et surjective, c'est-à-dire si $\forall y \in F \quad \exists! x \in E \quad y = f(x)$.

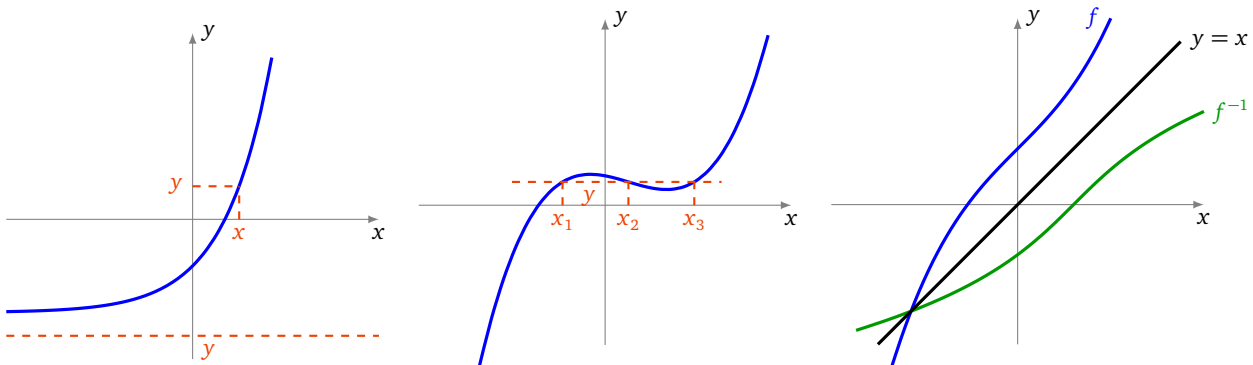
Proposition 8.

Si $f : E \rightarrow F$ est une fonction bijective alors il existe une unique application $g : F \rightarrow E$ telle que $g \circ f = \text{id}_E$ et $f \circ g = \text{id}_F$. La fonction g est la **bijection réciproque** de f et se note f^{-1} .

Remarque.

- On rappelle que l'**identité**, $\text{id}_E : E \rightarrow E$ est simplement définie par $x \mapsto x$.
- $g \circ f = \text{id}_E$ se reformule ainsi : $\forall x \in E \quad g(f(x)) = x$.
- Alors que $f \circ g = \text{id}_F$ s'écrit : $\forall y \in F \quad f(g(y)) = y$.
- Dans un repère orthonormé les graphes des fonctions f et f^{-1} sont symétriques par rapport à la première bissectrice.

Voici le graphe d'une fonction injective (à gauche), d'une fonction surjective (à droite) et enfin le graphe d'une fonction bijective ainsi que le graphe de sa bijection réciproque.



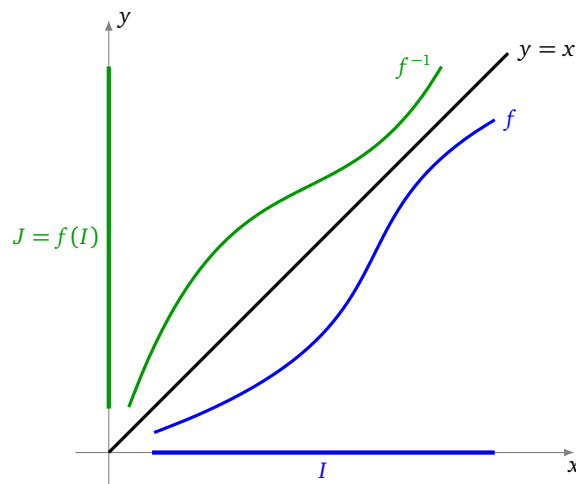
5.2. Fonctions monotones et bijections

Voici un théorème très utilisé dans la pratique pour montrer qu'une fonction est bijective.

Théorème 3 (Théorème de la bijection).

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie sur un intervalle I de \mathbb{R} . Si f est continue et strictement monotone sur I , alors

1. f établit une bijection de l'intervalle I dans l'intervalle image $J = f(I)$,
2. la fonction réciproque $f^{-1} : J \rightarrow I$ est continue et strictement monotone sur J et elle a le même sens de variation que f .



En pratique, si on veut appliquer ce théorème à une fonction continue $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, on découpe l'intervalle I en sous-intervalles sur lesquels la fonction f est strictement monotone.

Exemple 14.

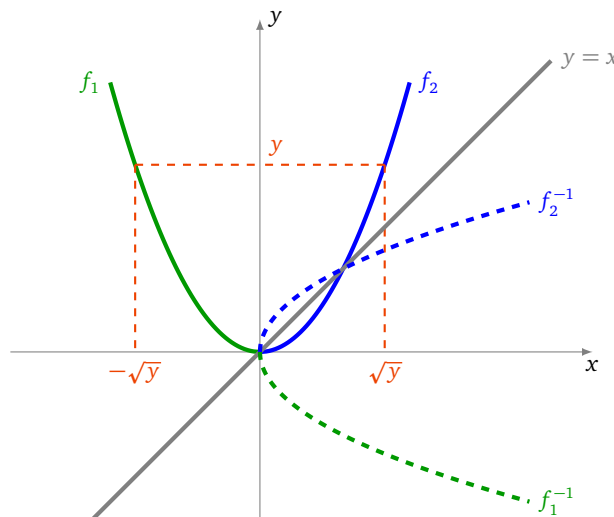
Considérons la fonction carrée définie sur \mathbb{R} par $f(x) = x^2$. La fonction f n'est pas strictement monotone sur \mathbb{R} : elle n'est pas même pas injective car un nombre et son opposé ont même carré. Cependant, en restreignant son ensemble de définition à $] -\infty, 0]$ d'une part et à $[0, +\infty[$ d'autre part, on définit deux fonctions strictement monotones :

$$f_1 : \begin{cases}]-\infty, 0] \longrightarrow [0, +\infty[\\ x \mapsto x^2 \end{cases} \quad \text{et} \quad f_2 : \begin{cases} [0, +\infty[\longrightarrow [0, +\infty[\\ x \mapsto x^2 \end{cases}$$

On remarque que $f(]-\infty, 0]) = f([0, +\infty[) = [0, +\infty[$. D'après le théorème précédent, les fonctions f_1 et f_2 sont des bijections. Déterminons leurs fonctions réciproques $f_1^{-1} : [0, +\infty[\rightarrow]-\infty, 0]$ et $f_2^{-1} : [0, +\infty[\rightarrow [0, +\infty[$. Soient deux réels x et y tels que $y \geq 0$. Alors

$$\begin{aligned} y = f(x) &\Leftrightarrow y = x^2 \\ &\Leftrightarrow x = \sqrt{y} \quad \text{ou} \quad x = -\sqrt{y}, \end{aligned}$$

c'est-à-dire y admet (au plus) deux antécédents, l'un dans $[0, +\infty[$ et l'autre dans $] -\infty, 0]$. Et donc $f_1^{-1}(y) = -\sqrt{y}$ et $f_2^{-1}(y) = \sqrt{y}$. On vérifie bien que chacune des deux fonctions f_1 et f_2 a le même sens de variation que sa réciproque.



On remarque que la courbe totale en pointillé (à la fois la partie bleue et la verte), qui est l'image du graphe de f par la symétrie par rapport à la première bissectrice, ne peut pas être le graphe d'une fonction : c'est une autre manière de voir que f n'est pas bijective.

Généralisons en partie l'exemple précédent.

Exemple 15.

Soit $n \geq 1$. Soit $f : [0, +\infty[\rightarrow [0, +\infty[$ définie par $f(x) = x^n$. Alors f est continue et strictement croissante. Comme $\lim_{+\infty} f = +\infty$ alors f est une bijection. Sa bijection réciproque f^{-1} est notée : $x \mapsto x^{\frac{1}{n}}$ (ou aussi $x \mapsto \sqrt[n]{x}$) : c'est la fonction racine n -ième. Elle est continue et strictement croissante.

5.3. Démonstration

On établit d'abord un lemme utile à la démonstration du « théorème de la bijection ».

Lemme 2.

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie sur un intervalle I de \mathbb{R} . Si f est strictement monotone sur I , alors f est injective sur I .

Démonstration. Soient $x, x' \in I$ tels que $f(x) = f(x')$. Montrons que $x = x'$. Si on avait $x < x'$, alors on aurait nécessairement $f(x) < f(x')$ ou $f(x) > f(x')$, suivant que f est strictement croissante, ou strictement décroissante. Comme c'est impossible, on en déduit que $x \geq x'$. En échangeant les rôles de x et de x' , on montre de même que $x \leq x'$. On en conclut que $x = x'$ et donc que f est injective. \square

Démonstration du théorème.

- D'après le lemme précédent, f est injective sur I . En restreignant son ensemble d'arrivée à son image $J = f(I)$, on obtient que f établit une bijection de I dans J . Comme f est continue, par le théorème des valeurs intermédiaires, l'ensemble J est un intervalle.
- Supposons pour fixer les idées que f est strictement croissante.
 - Montrons que f^{-1} est strictement croissante sur J . Soient $y, y' \in J$ tels que $y < y'$. Notons $x = f^{-1}(y) \in I$ et $x' = f^{-1}(y') \in I$. Alors $y = f(x)$, $y' = f(x')$ et donc

$$\begin{aligned} y < y' &\implies f(x) < f(x') \\ &\implies x < x' \quad (\text{car } f \text{ est strictement croissante}) \\ &\implies f^{-1}(y) < f^{-1}(y'), \end{aligned}$$

c'est-à-dire f^{-1} est strictement croissante sur J .

- Montrons que f^{-1} est continue sur J . On se limite au cas où I est de la forme $]a, b[$, les autres cas se montrent de la même manière. Soit $y_0 \in J$. On note $x_0 = f^{-1}(y_0) \in I$. Soit $\epsilon > 0$. On peut toujours supposer que $[x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon] \subset I$. On cherche un réel $\delta > 0$ tel que pour tout $y \in J$ on ait

$$y_0 - \delta < y < y_0 + \delta \implies f^{-1}(y_0) - \epsilon < f^{-1}(y) < f^{-1}(y_0) + \epsilon$$

c'est-à-dire tel que pour tout $x \in I$ on ait

$$y_0 - \delta < f(x) < y_0 + \delta \implies f^{-1}(y_0) - \epsilon < x < f^{-1}(y_0) + \epsilon.$$

Or, comme f est strictement croissante, on a pour tout $x \in I$

$$\begin{aligned} f(x_0 - \epsilon) < f(x) < f(x_0 + \epsilon) &\implies x_0 - \epsilon < x < x_0 + \epsilon \\ &\implies f^{-1}(y_0) - \epsilon < x < f^{-1}(y_0) + \epsilon. \end{aligned}$$

Comme $f(x_0 - \epsilon) < y_0 < f(x_0 + \epsilon)$, on peut choisir le réel $\delta > 0$ tel que

$$f(x_0 - \epsilon) < y_0 - \delta \quad \text{et} \quad f(x_0 + \epsilon) > y_0 + \delta$$

et on a bien alors pour tout $x \in I$

$$\begin{aligned} y_0 - \delta < f(x) < y_0 + \delta &\implies f(x_0 - \epsilon) < f(x) < f(x_0 + \epsilon) \\ &\implies f^{-1}(y_0) - \epsilon < x < f^{-1}(y_0) + \epsilon. \end{aligned}$$

La fonction f^{-1} est donc continue sur J . \square

Mini-exercices.

- Montrer que chacune des hypothèses « continue » et « strictement monotone » est nécessaire dans l'énoncé du théorème de la bijection.
- Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^3 + x$. Montrer que f est bijective, tracer le graphe de f et de f^{-1} .
- Soit $n \geq 1$. Montrer que $f(x) = 1 + x + x^2 + \dots + x^n$ définit une bijection de l'intervalle $[0, 1]$ vers un intervalle à préciser.
- Existe-t-il une fonction continue : $f : [0, 1[\rightarrow]0, 1[$ qui soit bijective ? $f : [0, 1[\rightarrow]0, 1[$ qui soit injective ? $f :]0, 1[\rightarrow [0, 1]$ qui soit surjective ?
- Pour $y \in \mathbb{R}$ on considère l'équation $x + \exp x = y$. Montrer qu'il existe une unique solution y . Comment varie y

⋈ en fonction de x ? Comme varie x en fonction de y ?

Auteurs du chapitre

Auteurs : Arnaud Bodin, Niels Borne, Laura Desideri

Dessins : Benjamin Boutin