Déterminants

Vidéo ■ partie 1. Déterminant en dimension 2 et 3
Vidéo ■ partie 2. Définition du déterminant
Vidéo ■ partie 3. Propriétés du déterminant
Vidéo ■ partie 4. Calculs de déterminants
Vidéo ■ partie 5. Applications des déterminants
Fiche d'exercices ♦ Calculs de déterminants

Le déterminant est un nombre que l'on associe à n vecteurs $(v_1, \ldots, v_n)$ de $\mathbb{R}^n$. Il correspond au volume du parallélépipède engendré par ces n vecteurs. On peut aussi définir le déterminant d'une matrice A. Le déterminant permet de savoir si une matrice est inversible ou pas, et de façon plus générale, joue un rôle important dans le calcul matriciel et la résolution de systèmes linéaires.

Dans tout ce qui suit, nous considérons des matrices à coefficients dans un corps commutatif $\mathbb{K}$, les principaux exemples étant $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Nous commençons par donner l'expression du déterminant d'une matrice en petites dimensions.

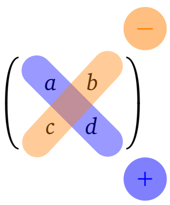
1. Déterminant en dimension 2 et 3

1.1. Matrice 2×2

En dimension 2, le déterminant est très simple à calculer :

$$\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc.$$

C'est donc le produit des éléments sur la diagonale principale (en bleu) moins le produit des éléments sur l'autre diagonale (en orange).



1.2. Matrice 3×3

Soit $A \in M_3(\mathbb{K})$ une matrice 3×3 :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

Voici la formule pour le déterminant :

$$\det A = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{32}a_{23}a_{11} - a_{33}a_{21}a_{12}\,.$$

Il existe un moyen facile de retenir cette formule, c'est la ***règle de Sarrus*** : on recopie les deux premières colonnes à droite de la matrice (colonnes grisées), puis on additionne les produits de trois termes en les regroupant selon la direction de la diagonale descendante (à gauche), et on soustrait ensuite les produits de trois termes regroupés selon la direction de la diagonale montante (à droite).

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{pmatrix}$$

Exemple 1.

Calculons le déterminant de la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Par la règle de Sarrus :

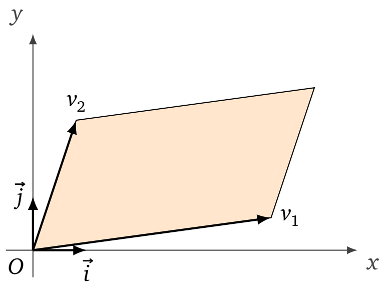
$$\begin{aligned} \det A = {} & 2 \times (-1) \times 1 + 1 \times 3 \times 3 + 0 \times 1 \times 2 \\ & - 3 \times (-1) \times 0 - 2 \times 3 \times 2 - 1 \times 1 \times 1 = -6. \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 3 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Attention : cette méthode ne s'applique pas pour les matrices de taille supérieure à 3. Nous verrons d'autres méthodes qui s'appliquent aux matrices carrées de toute taille et donc aussi aux matrices 3×3.

1.3. Interprétation géométrique du déterminant

On va voir qu'en dimension 2, les déterminants correspondent à des aires et en dimension 3 à des volumes.
Donnons nous deux vecteurs $v_1 = \binom{a}{c}$ et $v_2 = \binom{b}{d}$ du plan $\mathbb{R}^2$. Ces deux vecteurs v_1, v_2 déterminent un parallélogramme.



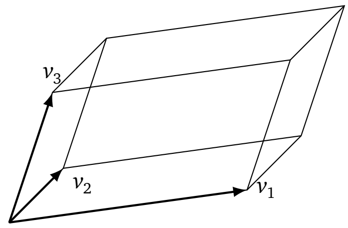
Proposition 1.
L'aire du parallélogramme est donnée par la valeur absolue du déterminant :

$$\mathscr{A} = \left|\det(v_1, v_2)\right| = \left|\det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right|.$$

De manière similaire, trois vecteurs de l'espace $\mathbb{R}^3$:

$$v_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{pmatrix} \qquad v_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \end{pmatrix} \qquad v_3 = \begin{pmatrix} a_{13} \\ a_{23} \\ a_{33} \end{pmatrix}$$

définissent un parallélépipède.



À partir de ces trois vecteurs on définit, en juxtaposant les colonnes, une matrice et un déterminant :

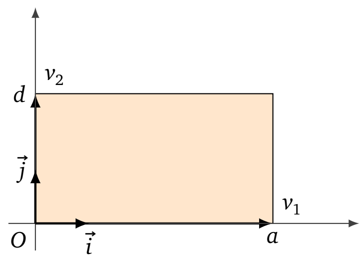
$$\det(v_1, v_2, v_3) = \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

Proposition 2.
Le volume du parallélépipède est donné par la valeur absolue du déterminant :

$$\mathcal{V} = \Big| \det(v_1, v_2, v_3) \Big|.$$

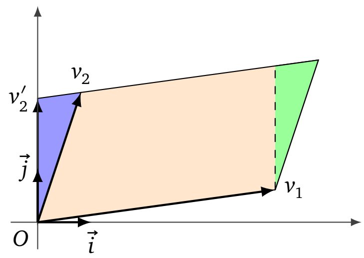
On prendra comme unité d'aire dans $\mathbb{R}^2$ l'aire du carré unité dont les côtés sont les vecteurs de la base canonique $\left(\binom{1}{0}, \binom{0}{1}\right)$, et comme unité de volume dans $\mathbb{R}^3$, le volume du cube unité.

Démonstration. Traitons le cas de la dimension 2. Le résultat est vrai si $v_1 = \binom{a}{0}$ et $v_2 = \binom{0}{d}$. En effet, dans ce cas on a affaire à un rectangle de côtés $|a|$ et $|d|$, donc d'aire $|ad|$, alors que le déterminant de la matrice $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}$ vaut ad.



Si les vecteurs v_1 et v_2 sont colinéaires alors le parallélogramme est aplati, donc d'aire nulle ; on calcule facilement que lorsque deux vecteurs sont colinéaires, leur déterminant est nul.

Dans la suite on suppose que les vecteurs ne sont pas colinéaires. Notons $v_1 = \binom{a}{c}$ et $v_2 = \binom{b}{d}$. Si $a \neq 0$, alors $v_2' = v_2 - \frac{b}{a} v_1$ est un vecteur vertical : $v_2' = \binom{0}{d - \frac{b}{a}c}$.
L'opération de remplacer v_2 par v_2' ne change pas l'aire du parallélogramme (c'est comme si on avait coupé le triangle vert et on l'avait collé à la place le triangle bleu).

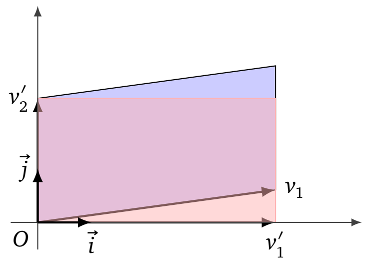


Cette opération ne change pas non plus le déterminant car on a toujours :

$$\det(v_1, v_2') = \det \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & d - \frac{b}{a}c \end{pmatrix} = ad - bc = \det(v_1, v_2).$$

On pose alors $v_1' = \binom{a}{0}$: c'est un vecteur horizontal. Encore une fois l'opération de remplacer v_1 par v_1' ne change ni l'aire des parallélogrammes ni le déterminant car

$$\det(v_1', v_2') = \det \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d - \frac{b}{a}c \end{pmatrix} = ad - bc = \det(v_1, v_2).$$



On s'est donc ramené au premier cas d'un rectangle aux côtés parallèles aux axes, pour lequel le résultat est déjà acquis.

Le cas tridimensionnel se traite de façon analogue. □

Mini-exercices.

1. Pour $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} -7 & 8 \\ -9 & 5 \end{pmatrix}$ calculer les déterminants de A, B, $A \times B$, $A + B$, A^{-1}, λA, A^T.
2. Mêmes questions pour $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} a' & 0 \\ c' & d' \end{pmatrix}$.
3. Mêmes questions pour $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.
4. Calculer l'aire du parallélogramme défini par les vecteurs $\binom{7}{3}$ et $\binom{1}{4}$.
5. Calculer le volume du parallélépipède défini par les vecteurs $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$.

2. Définition du déterminant

Cette partie est consacrée à la définition du déterminant. La définition du déterminant est assez abstraite et il faudra attendre encore un peu pour pouvoir vraiment calculer des déterminants.

2.1. Définition et premières propriétés

Nous allons caractériser le déterminant comme une application, qui à une matrice carrée associe un scalaire :

$$\det : M_n(\mathbb{K}) \longrightarrow \mathbb{K}$$

Théorème 1 (Existence et d'unicité du déterminant).
Il existe une unique application de $M_n(\mathbb{K})$ dans $\mathbb{K}$, appelée **déterminant**, *telle que*

(i) le déterminant est linéaire par rapport à chaque vecteur colonne, les autres étant fixés ;
(ii) si une matrice A a deux colonnes identiques, alors son déterminant est nul ;
(iii) le déterminant de la matrice identité I_n vaut 1.

Une preuve de l'existence du déterminant sera donnée plus bas en section 2.4.
On note le déterminant d'une matrice $A = (a_{ij})$ par :

$$\det A \qquad \text{ou} \qquad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Si on note C_i la i-ème colonne de A, alors

$$\det A = \begin{vmatrix} C_1 & C_2 & \cdots & C_n \end{vmatrix} = \det(C_1, C_2, \ldots, C_n).$$

Avec cette notation, la propriété (i) de linéarité par rapport à la colonne j s'écrit : pour tout $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$, $\det(C_1, \dots, \lambda C_j + \mu C'_j, \dots, C_n) = \lambda \det(C_1, \dots, C_j, \dots, C_n) + \mu \det(C_1, \dots, C'_j, \dots, C_n)$, soit

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & \lambda a_{1j} + \mu a'_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & \lambda a_{ij} + \mu a'_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & \lambda a_{nj} + \mu a'_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= \lambda \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \mu \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a'_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a'_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a'_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Exemple 2.

$$\begin{vmatrix} 6 & 5 & 4 \\ 7 & -10 & -3 \\ 12 & 25 & -1 \end{vmatrix} = 5 \times \begin{vmatrix} 6 & 1 & 4 \\ 7 & -2 & -3 \\ 12 & 5 & -1 \end{vmatrix}$$

Car la seconde colonne est un multiple de 5.

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 4-3 \\ 7 & -5 & 3-2 \\ 9 & 2 & 10-4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 7 & -5 & 3 \\ 9 & 2 & 10 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 7 & -5 & 2 \\ 9 & 2 & 4 \end{vmatrix}$$

Par linéarité sur la troisième colonne.

Remarque.

- Une application de $M_n(\mathbb{K})$ dans $\mathbb{K}$ qui satisfait la propriété (i) est appelée ***forme multilinéaire***.
- Si elle satisfait (ii), on dit qu'elle est ***alternée***.

Le déterminant est donc la seule forme multilinéaire alternée qui prend comme valeur 1 sur la matrice I_n. Les autres formes multilinéaires alternées sont les multiples scalaires du déterminant. On verra plus loin comment on peut calculer en pratique les déterminants.

2.2. Premières propriétés

Nous connaissons déjà le déterminant de deux matrices :

- le déterminant de la matrice nulle 0_n vaut 0 (par la propriété (ii)),
- le déterminant de la matrice identité I_n vaut 1 (par la propriété (iii)).

Donnons maintenant quelques propriétés importantes du déterminant : comment se comporte le déterminant face aux opérations élémentaires sur les colonnes ?

Proposition 3.
Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$ une matrice ayant les colonnes $C_1, C_2, \dots, C_n$. On note A' la matrice obtenue par une des opérations élémentaires sur les colonnes, qui sont :

1. *$C_i \leftarrow \lambda C_i$ avec $\lambda \neq 0$: A' est obtenue en multipliant une colonne de A par un scalaire non nul. Alors $\det A' = \lambda \det A$.*
2. *$C_i \leftarrow C_i + \lambda C_j$ avec $\lambda \in \mathbb{K}$ (et $j \neq i$) : A' est obtenue en ajoutant à une colonne de A un multiple d'une autre colonne de A. Alors $\det A' = \det A$.*
3. *$C_i \leftrightarrow C_j$: A' est obtenue en échangeant deux colonnes distinctes de A. Alors $\boxed{\det A' = -\det A}$.*

Plus généralement pour (2) : l'opération $C_i \leftarrow C_i + \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} \lambda_j C_j$ d'ajouter une combinaison linéaire des autres colonnes conserve le déterminant.

Attention ! Échanger deux colonnes change le signe du déterminant.

Démonstration.

1. La première propriété découle de la partie (i) de la définition du déterminant.
2. Soit $A = \begin{pmatrix} C_1 & \cdots & C_i & \cdots & C_j & \cdots & C_n \end{pmatrix}$ une matrice représentée par ses vecteurs colonnes C_k. L'opération $C_i \leftarrow C_i + \lambda C_j$ transforme la matrice A en la matrice $A' = \begin{pmatrix} C_1 & \cdots & C_i + \lambda C_j & \cdots & C_j & \cdots & C_n \end{pmatrix}$. Par linéarité par rapport à la colonne i, on sait que
$$\det A' = \det A + \lambda \det \begin{pmatrix} C_1 & \cdots & C_j & \cdots & C_j & \cdots & C_n \end{pmatrix}.$$
Or les colonnes i et j de la matrice $\begin{pmatrix} C_1 & \cdots & C_j & \cdots & C_j & \cdots & C_n \end{pmatrix}$ sont identiques, donc son déterminant est nul.
3. Si on échange les colonnes i et j de $A = \begin{pmatrix} C_1 & \cdots & C_i & \cdots & C_j & \cdots & C_n \end{pmatrix}$ on obtient la matrice $A' = \begin{pmatrix} C_1 & \cdots & C_i & \cdots & C_j & \cdots & C_n \end{pmatrix}$, où le vecteur C_j se retrouve en colonne i et le vecteur C_i en colonne j. Introduisons alors une troisième matrice $B = \begin{pmatrix} C_1 & \cdots & C_i + C_j & \cdots & C_j + C_i & \cdots & C_n \end{pmatrix}$. Cette matrice a deux colonnes distinctes égales, donc d'après (ii), $\det B = 0$.

   D'un autre côté, nous pouvons développer ce déterminant en utilisant la propriété (i) de multilinéarité, c'est-à-dire linéarité par rapport à chaque colonne. Ceci donne
$$\begin{aligned} 0 = \det B &= \det \begin{pmatrix} C_1 & \cdots & C_i + C_j & \cdots & C_j + C_i & \cdots & C_n \end{pmatrix} \\ &= \det \begin{pmatrix} C_1 & \cdots & C_i & \cdots & C_j + C_i & \cdots & C_n \end{pmatrix} \\ &\quad + \det \begin{pmatrix} C_1 & \cdots & C_j & \cdots & C_j + C_i & \cdots & C_n \end{pmatrix} \\ &= \det \begin{pmatrix} C_1 & \cdots & C_i & \cdots & C_j & \cdots & C_n \end{pmatrix} \\ &\quad + \det \begin{pmatrix} C_1 & \cdots & C_i & \cdots & C_i & \cdots & C_n \end{pmatrix} \\ &\quad + \det \begin{pmatrix} C_1 & \cdots & C_j & \cdots & C_j & \cdots & C_n \end{pmatrix} \\ &\quad + \det \begin{pmatrix} C_1 & \cdots & C_j & \cdots & C_i & \cdots & C_n \end{pmatrix} \\ &= \det A + 0 + 0 + \det A', \end{aligned}$$
   encore grâce à (i) pour les deux déterminants nuls du milieu.

$\square$

Corollaire 1.
Si une colonne C_i de la matrice A est combinaison linéaire des autres colonnes, alors $\det A = 0$.

2.3. Déterminants de matrices particulières

Calculer des déterminants n'est pas toujours facile. Cependant il est facile de calculer le déterminant de matrices triangulaires.

Proposition 4.
Le déterminant d'une matrice triangulaire supérieure (ou inférieure) est égal au produit des termes diagonaux.

Autrement dit, pour une matrice triangulaire $A = (a_{ij})$ on a
$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & \ldots & \ldots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \ldots & \ldots & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & \ldots & \ldots & 0 & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} \cdots a_{nn}.$$

Comme cas particulièrement important on obtient :

Corollaire 2.
Le déterminant d'une matrice diagonale est égal au produit des termes diagonaux.

Démonstration. On traite le cas des matrices triangulaires supérieures (le cas des matrices triangulaires inférieures est identique). Soit donc

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

La façon de procéder utilise l'algorithme du pivot de Gauss (sur les colonnes, alors qu'il est en général défini sur les lignes). Par linéarité par rapport à la première colonne, on a

$$\det A = a_{11} \begin{vmatrix} 1 & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

On soustrait maintenant de chaque colonne C_j, pour $j \geqslant 2$, la colonne C_1 multipliée par $-a_{1j}$. C'est l'opération élémentaire $C_j \leftarrow C_j - a_{1j}C_1$. Ceci ne modifie pas le déterminant d'après la section précédente. Il vient donc

$$\det A = a_{11} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Par linéarité par rapport à la deuxième colonne, on en déduit

$$\det A = a_{11} \cdot a_{22} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

et l'on continue ainsi jusqu'à avoir parcouru toutes les colonnes de la matrice. Au bout de n étapes, on a obtenu

$$\det A = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} \cdots a_{nn} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} \cdots a_{nn} \cdot \det I_n,$$

d'où le résultat, car $\det I_n = 1$, par (iii). □

2.4. Démonstration de l'existence du déterminant

La démonstration du théorème d'existence du déterminant, exposée ci-dessous, est ardue et pourra être gardée pour une seconde lecture. Par ailleurs, l'unicité du déterminant, plus difficile, est admise.

Pour démontrer l'existence d'une application satisfaisant aux conditions (i), (ii), (iii) du théorème-définition 1, on donne une formule qui, de plus, nous offre une autre méthode de calcul pratique du déterminant d'une matrice, et on vérifie que les propriétés caractéristiques des déterminants sont satisfaites. On retrouvera cette formule, dite de développement par rapport à une ligne, en section 4.2.

Notation. Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$ une matrice carrée de taille $n \times n$. Il est évident que si l'on supprime une ligne et une colonne dans A, la matrice obtenue a $n-1$ lignes et $n-1$ colonnes. On note $A_{i,j}$ ou A_{ij} la matrice obtenue en supprimant la i-ème ligne et la j-ème colonne de A. Le théorème d'existence peut s'énoncer de la façon suivante :

> **Théorème 2** (Existence du déterminant).
> *Les formules suivantes définissent par récurrence, pour $n \geqslant 1$, une application de $M_n(\mathbb{K})$ dans $\mathbb{K}$ qui satisfait aux propriétés (i), (ii), (iii) caractérisant le déterminant :*
> - ***Déterminant d'une matrice** 1×1. Si $a \in \mathbb{K}$ et $A = (a)$, $\det A = a$.*

- ***Formule de récurrence.*** *Si $A = (a_{i,j})$ est une matrice carrée de taille $n \times n$, alors pour tout i fixé*
$$\det A = (-1)^{i+1} a_{i,1} \det A_{i,1} + (-1)^{i+2} a_{i,2} \det A_{i,2} + \cdots + (-1)^{i+n} a_{i,n} \det A_{i,n}.$$

Démonstration. La preuve se fait par récurrence sur l'ordre des matrices.

Initialisation. Dans le cas $n = 1$, il est évident que toutes les propriétés souhaitées sont satisfaites.

Hérédité. Supposons maintenant que l'application $\det : M_{n-1}(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ soit définie et satisfasse les propriétés (i), (ii) et (iii). Pour faciliter l'exposition, la preuve va être faite pour $i = n$. Soit $A = (a_{i,j})$ notée aussi $A = (C_1 \cdots C_n)$ où $C_j = \begin{pmatrix} a_{1,j} \\ \vdots \\ a_{n,j} \end{pmatrix}$ est la j-ème colonne de A. On notera aussi $\bar{C}_j = \begin{pmatrix} a_{1,j} \\ \vdots \\ a_{n-1,j} \end{pmatrix}$ la colonne à $(n-1)$ éléments, égale à C_j privée de son dernier coefficient.

- **Propriété (i).**
Il s'agit de vérifier que l'application
$$A \mapsto \det A = (-1)^{n+1} a_{n,1} \det A_{n,1} + (-1)^{n+2} a_{n,2} \det A_{n,2} + \cdots + (-1)^{n+n} a_{n,n} \det A_{n,n}$$
est linéaire par rapport à chaque colonne. Nous allons le prouver pour la dernière colonne, c'est-à-dire que :
$$\det(C_1, \ldots, C_{n-1}, \lambda C'_n + \mu C''_n) = \lambda \det(C_1, \ldots, C_{n-1}, C'_n) + \mu \det(C_1, \ldots, C_{n-1}, C''_n).$$
Notons A, A', A'' les matrices $(C_1 \cdots C_{n-1} \cdots \lambda C'_n + \mu C''_n)$, $(C_1 \cdots C_{n-1} \cdots C'_n)$ et $(C_1 \cdots C_{n-1} \cdots C''_n)$, et $A_{n,j}$, $A'_{n,j}$, $A''_{n,j}$ les sous-matrices extraites en enlevant n-ème ligne et la j-ème colonne. En comparant les différentes matrices, on constate que $a'_{n,j} = a''_{n,j} = a_{n,j}$ si $j < n$ tandis que $a_{n,n} = \lambda a'_{n,n} + \mu a''_{n,n}$. Similairement, $A'_{n,n} = A''_{n,n} = A_{n,n} = (\bar{C}_1 \cdots \bar{C}_{n-1})$ puisque la n-ème colonne est enlevée. Par contre, pour $j < n$, $A_{n,j}, A'_{n,j}, A''_{n,j}$ ont leurs $(n-2)$ premières colonnes identiques, et diffèrent par la dernière. Comme ce sont des déterminants de taille $n-1$, on peut utiliser l'hypothèse de récurrence :
$$\begin{aligned} \det A_{n,j} &= \det(\bar{C}_1, \ldots, \bar{C}_{j-1}, \bar{C}_{j+1}, \ldots, \bar{C}_{n-1}, \lambda \bar{C}'_n + \mu \bar{C}''_n) \\ &= \lambda \det(\bar{C}_1, \ldots, \bar{C}_{j-1}, \bar{C}_{j+1}, \ldots, \bar{C}_{n-1}, \bar{C}'_n) \\ &\quad + \mu \det(\bar{C}_1, \ldots, \bar{C}_{j-1}, \bar{C}_{j+1}, \ldots, \bar{C}_{n-1}, \bar{C}''_n) \\ &= \lambda \det A'_{n,j} + \mu \det A''_{n,j} \end{aligned}$$
Finalement, en mettant de côté dans la somme le n-ème terme :
$$\begin{aligned} \det A &= (-1)^{n+1} a_{n,1} \det A_{n,1} + (-1)^{n+2} a_{n,2} \det A_{1,2} + \cdots + (-1)^{n+n} a_{n,n} \det A_{n,n} \\ &= \left(\sum_{j=1}^{n-1} (-1)^{n+j} a_{n,j} \det A_{n,j} \right) + (-1)^{2n} a_{n,n} \det A_{n,n} \\ &= \left(\sum_{j=1}^{n-1} (-1)^{n+j} a_{n,j} (\lambda \det A'_{n,j} + \mu \det A''_{n,j}) \right) + (-1)^{2n} (\lambda a'_{n,n} + \mu a''_{n,n}) \det A_{n,n} \\ &= \lambda \sum_{j=1}^{n} (-1)^{n+j} a'_{n,j} \det A'_{n,j} + \mu \sum_{j=1}^{n} (-1)^{n+j} a''_{n,j} \det A''_{n,j} \\ &= \lambda \det A' + \mu \det A'' \end{aligned}$$
La démonstration est similaire pour les autres colonnes (on peut aussi utiliser la propriété (ii) ci-dessous).

- **Propriété (ii).**
Supposons que $C_r = C_s$ pour $r < s$. Si k est différent de r et de s, la matrice $A_{n,k}$ possède encore deux colonnes identiques $\bar{C}_r$ et $\bar{C}_s$. Par hypothèse de récurrence, $\det A_{n,k} = 0$. Par conséquent,
$$\det A = (-1)^{n+r} \det A_{n,r} + (-1)^{n+s} \det A_{n,s}$$
Or $A_{n,r}$ et $A_{n,s}$ possèdent toutes les deux les mêmes colonnes : $A_{n,r} = (\bar{C}_1 \cdots \bar{C}_{r-1} \bar{C}_{r+1} \cdots \bar{C}_s \cdots \bar{C}_n)$ et $A_{n,s} = (\bar{C}_1 \cdots \bar{C}_r \cdots \bar{C}_{s-1} \bar{C}_{s+1} \cdots \bar{C}_n)$, car $\bar{C}_r = \bar{C}_s$. Pour passer de $A_{n,s}$ à $A_{n,r}$, il faut faire $s - r - 1$ échanges de colonnes $\bar{C}_j \leftrightarrow \bar{C}_{j+1}$ successifs, qui par hypothèse de récurrence changent le signe par $(-1)^{s-r-1}$: $\det A_{n,s} = (-1)^{s-r-1} \det A_{n,r}$. On conclut immédiatement que
$$\det A = \left((-1)^{n+r} + (-1)^{n+2s-r-1} \right) \det A_{n,r} = 0.$$

- **Propriété (iii).** Si l'on considère pour A la matrice identité I_n, ses coefficients $a_{i,j}$ sont tels que :
$$\begin{aligned} i = j &\Longrightarrow a_{i,j} = 1 \\ i \neq j &\Longrightarrow a_{i,j} = 0. \end{aligned}$$

Donc $\det I_n = (-1)^{n+n}\det A_{n,n}$. Or, la matrice $A_{n,n}$ obtenue à partir de la matrice identité en supprimant la dernière ligne et la dernière colonne est la matrice identité de taille $(n-1)\times(n-1)$. Par hypothèse de récurrence, on a $\det I_{n-1} = 1$. On en déduit $\det I_n = 1$.

Conclusion. Le principe de récurrence termine la preuve du théorème d'existence du déterminant. □

Remarque.
La définition donnée ci-dessus suppose le choix d'un indice i de ligne ($i = n$ dans la démonstration) et peut paraître arbitraire. Alors se pose naturellement la question : que se passe-t-il si l'on prend une autre valeur de i ? L'unicité du déterminant d'une matrice permet de répondre : quelle que soit la ligne choisie, le résultat est le même.

Mini-exercices.

1. En utilisant la linéarité du déterminant, calculer $\det(-I_n)$.
2. Pour $A \in M_n(\mathbb{K})$, calculer $\det(\lambda A)$ en fonction de $\det A$.
3. Montrer que le déterminant reste invariant par l'opération $C_i \leftarrow C_i + \sum_{\substack{j=1..n\\ j\neq i}} \lambda_j C_j$ (on ajoute à une colonne de A une combinaison linéaire des autres colonnes de A).

3. Propriétés du déterminant

Nous allons voir trois propriétés importantes du déterminant : le déterminant d'un produit de matrices, le déterminant de l'inverse d'une matrice, le déterminant de la transposée d'une matrice. Pour prouver ces propriétés, nous aurons besoin des matrices élémentaires.

3.1. Déterminant et matrices élémentaires

Pour chacune des opérations élémentaires sur les colonnes d'une matrice A, on associe une matrice élémentaire E, telle que la matrice obtenue par l'opération élémentaire sur A soit $A' = A \times E$.

1. $C_i \leftarrow \lambda C_i$ avec $\lambda \neq 0$: $E_{C_i\leftarrow\lambda C_i} = \mathrm{diag}(1,\ldots,1,\lambda,1,\ldots,1)$ est la matrice diagonale ne comportant que des 1, sauf en position (i,i) ;
2. $C_i \leftarrow C_i + \lambda C_j$ avec $\lambda \in \mathbb{K}$ (et $j \neq i$) : $E_{C_i\leftarrow C_i+\lambda C_j}$ est comme la matrice identité, sauf en position (j,i) où son coefficient vaut λ ;
3. $C_i \leftrightarrow C_j$: $E_{C_i\leftrightarrow C_j}$ est comme la matrice identité, sauf que ses coefficients (i,i) et (j,j) s'annulent, tandis que les coefficients (i,j) et (j,i) valent 1.

$$E_{C_i\leftarrow C_i+\lambda C_j} = \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & \lambda & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & 1 & \\ & & & & & \ddots \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix} \qquad E_{C_i\leftrightarrow C_j} = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & & \\ & & 1 & & & & & & \\ & & & 0 & & & 1 & & \\ & & & & 1 & & & & \\ & & & & & \ddots & & & \\ & & & & & & 1 & & \\ & & & 1 & & & & 0 & \\ & & & & & & & & 1 \\ & & & & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & & & & 1 \end{pmatrix}$$

Nous allons détailler le cas de chaque opération et son effet sur le déterminant :

Proposition 5.

1. $\det E_{C_i\leftarrow\lambda C_i} = \lambda$
2. $\det E_{C_i\leftarrow C_i+\lambda C_j} = +1$
3. $\det E_{C_i\leftrightarrow C_j} = -1$
4. *Si E est une des matrices élémentaires ci-dessus,* $\det(A\times E) = \det A \times \det E$

Démonstration. Nous utilisons les propositions 3 et 4.

1. La matrice $E_{C_i\leftarrow\lambda C_i}$ est une matrice diagonale, tous les éléments diagonaux valent 1, sauf un qui vaut λ. Donc son déterminant vaut λ.

2. La matrice $E_{C_i \leftarrow C_i + \lambda C_j}$ est triangulaire inférieure ou supérieure avec des 1 sur la diagonale. Donc son déterminant vaut 1.
3. La matrice $E_{C_i \leftrightarrow C_j}$ est aussi obtenue en échangeant les colonnes i et j de la matrice I_n. Donc son déterminant vaut -1.
4. La formule $\det A \times E = \det A \times \det E$ est une conséquence immédiate de la proposition 3.

□

Cette proposition nous permet de calculer le déterminant d'une matrice A de façon relativement simple, en utilisant l'algorithme de Gauss. En effet, si en multipliant successivement A par des matrices élémentaires $E_1, \dots, E_r$ on obtient une matrice T échelonnée, donc triangulaire

$$T = A \cdot E_1 \cdots E_r$$

alors, en appliquant r-fois la proposition précédente, on obtient :

$$\begin{aligned}
\det T &= \det(A \cdot E_1 \cdots E_r) \\
&= \det(A \cdot E_1 \cdots E_{r-1}) \cdot \det E_r \\
&= \cdots \\
&= \det A \cdot \det E_1 \cdot \det E_2 \cdots \det E_r
\end{aligned}$$

Comme on sait calculer le déterminant de la matrice triangulaire T et les déterminants des matrices élémentaires E_i, on en déduit le déterminant de A.
En pratique cela ce passe comme sur l'exemple suivant.

Exemple 3.

Calculer $\det A$, où $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 \\ 1 & -6 & 6 \\ 5 & 9 & 1 \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned}
\det A &= \det \begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 \\ 1 & -6 & 6 \\ 5 & 9 & 1 \end{pmatrix} \\
&\quad \text{(opération } C_1 \leftrightarrow C_2 \text{ pour avoir un pivot en haut à gauche)} \\
&= (-1) \times \det \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ -6 & 1 & 6 \\ 9 & 5 & 1 \end{pmatrix} \\
&\quad (C_1 \leftarrow \tfrac{1}{3} C_1, \text{ linéarité par rapport à la première colonne}) \\
&= (-1) \times 3 \times \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -2 & 1 & 6 \\ 3 & 5 & 1 \end{pmatrix} \\
&= (-1) \times 3 \times \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 10 \\ 3 & 5 & -5 \end{pmatrix} \qquad C_3 \leftarrow C_3 - 2C_1 \\
&= (-1) \times 3 \times \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 3 & 5 & -55 \end{pmatrix} \qquad C_3 \leftarrow C_3 - 10C_2 \\
&= (-1) \times 3 \times (-55) \qquad \text{car la matrice est triangulaire} \\
&= 165
\end{aligned}$$

3.2. Déterminant d'un produit

Théorème 3.

$$\boxed{\det(AB) = \det A \cdot \det B}$$

Démonstration. La preuve utilise les matrices élémentaires ; en effet, par la proposition 5, pour A une matrice quelconque et E une matrice d'une opération élémentaire alors :

$$\det(A \times E) = \det A \times \det E.$$

Passons maintenant à la démonstration du théorème. On a vu dans le chapitre « Matrices » qu'une matrice B est inversible si et seulement si sa forme échelonnée réduite par le pivot de Gauss est égale à I_n, c'est-à-dire qu'il existe des matrices élémentaires E_i telles que

$$BE_1 \cdots E_r = I_n\,.$$

D'après la remarque préliminaire appliquée r fois, on a

$$\det(B \cdot E_1E_2 \cdots E_r) = \det B \cdot \det E_1 \cdot \det E_2 \cdots \det E_r = \det I_n = 1$$

On en déduit

$$\det B = \frac{1}{\det E_1 \cdots \det E_r}\,.$$

Pour la matrice AB, il vient

$$(AB) \cdot (E_1 \cdots E_r) = A \cdot I_n = A\,.$$

Ainsi

$$\det(ABE_1 \cdots E_r) = \det(AB) \cdot \det E_1 \cdots \det E_r = \det A\,.$$

Donc :

$$\det(AB) = \det A \times \frac{1}{\det E_1 \cdots \det E_r} = \det A \times \det B\,.$$

D'où le résultat dans ce cas.

Si B n'est pas inversible, $\operatorname{rg} B < n$, il existe donc une relation de dépendance linéaire entre les colonnes de B, ce qui revient à dire qu'il existe un vecteur colonne X tel que $BX = 0$. Donc $\det B = 0$, d'après le corollaire 1. Or $BX = 0$ implique $(AB)X = 0$. Ainsi AB n'est pas inversible non plus, d'où $\det(AB) = 0 = \det A \det B$ dans ce cas également.

□

3.3. Déterminant des matrices inversibles

Comment savoir si une matrice est inversible ? Il suffit de calculer son déterminant !

Corollaire 3.
Une matrice carrée A est inversible si et seulement si son déterminant est non nul. De plus si A est inversible, alors :

$$\boxed{\det\left(A^{-1}\right) = \frac{1}{\det A}}$$

Démonstration.

- Si A est inversible, il existe une matrice A^{-1} telle que $AA^{-1} = I_n$, donc $\det(A)\det(A^{-1}) = \det I_n = 1$. On en déduit que $\det A$ est non nul et $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det A}$.
- Si A n'est pas inversible, alors elle est de rang strictement inférieur à n. Il existe donc une relation de dépendance linéaire entre ses colonnes, c'est-à-dire qu'au moins l'une de ses colonnes est combinaison linéaire des autres. On en déduit $\det A = 0$.

□

Exemple 4.
Deux matrices semblables ont même déterminant.
En effet : soit $B = P^{-1}AP$ avec $P \in GL_n(\mathbb{K})$ une matrice inversible. Par multiplicativité du déterminant, on en déduit que :

$$\det B = \det(P^{-1}AP) = \det P^{-1} \det A \det P = \det A,$$

puisque $\det P^{-1} = \frac{1}{\det P}$.

3.4. Déterminant de la transposée

Corollaire 4.

$$\boxed{\det\left(A^T\right) = \det A}$$

Démonstration. Commençons par remarquer que la matrice E d'une opération élémentaire est soit triangulaire (substitution), soit symétrique c'est-à-dire égale à sa transposée (échange de lignes et homothétie). On vérifie facilement que $\det E^T = \det E$.
Supposons d'abord que A soit inversible. On peut alors l'écrire comme produit de matrices élémentaires, $A = E_1 \cdots E_r$. On a alors

$$A^T = E_r^T \cdots E_1^T$$

et

$$\det(A^T) = \det(E_r^T) \cdots \det(E_1^T) = \det(E_r) \cdots \det(E_1) = \det(A).$$

D'autre part, si A n'est pas inversible, alors A^T n'est pas inversible non plus, et $\det A = 0 = \det A^T$.

□

Remarque.
Une conséquence du dernier résultat, est que par transposition, tout ce que l'on a dit des déterminants à propos des colonnes est vrai pour les lignes. Ainsi, le déterminant est multilinéaire par rapport aux lignes, si une matrice a deux lignes égales, son déterminant est nul, on ne modifie pas un déterminant en ajoutant à une ligne une combinaison linéaire des autres lignes, etc.

Voici le détail pour les opérations élémentaires sur les lignes :

1. $L_i \leftarrow \lambda L_i$ avec $\lambda \neq 0$: le déterminant est multiplié par λ.
2. $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$ avec $\lambda \in \mathbb{K}$ (et $j \neq i$) : le déterminant ne change pas.
3. $L_i \leftrightarrow L_j$: le déterminant change de signe.

Mini-exercices.

1. Soient $A = \begin{pmatrix} a & 1 & 3 \\ 0 & b & 2 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & d & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Calculer, lorsque c'est possible, les déterminants des matrices A, B, A^{-1}, B^{-1}, A^T, B^T, AB, BA.
2. Calculer le déterminant de chacune des matrices suivantes en se ramenant par des opérations élémentaires à une matrice triangulaire.

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 6 \\ 3 & 4 & 15 \\ 5 & 6 & 21 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & j & j^2 \\ 1 & j^2 & j \end{pmatrix} \text{ avec } j = e^{\frac{2i\pi}{3}} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & 3 & 9 & 27 \\ 1 & 4 & 16 & 64 \\ 1 & 5 & 25 & 125 \end{pmatrix}$$

4. Calculs de déterminants

Une des techniques les plus utiles pour calculer un déterminant est le « développement par rapport à une ligne (ou une colonne) ».

4.1. Cofacteur

Définition 1.
Soit $A = \left(a_{ij}\right) \in M_n(\mathbb{K})$ une matrice carrée.

- On note A_{ij} la matrice extraite, obtenue en effaçant la ligne i et la colonne j de A.
- Le nombre $\det A_{ij}$ est un *mineur d'ordre $n-1$* de la matrice A.
- Le nombre $C_{ij} = (-1)^{i+j} \det A_{ij}$ est le *cofacteur* de A relatif au coefficient a_{ij}.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1,j-1} & a_{1,j} & a_{1,j+1} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \\ a_{i-1,1} & \dots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j} & a_{i-1,j+1} & \dots & a_{i-1,n} \\ a_{i,1} & \dots & a_{i,j-1} & a_{i,j} & a_{i,j+1} & \dots & a_{i,n} \\ a_{i+1,1} & \dots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j} & a_{i+1,j+1} & \dots & a_{i+1,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \\ a_{n1} & \dots & a_{n,j-1} & a_{n,j} & a_{n,j+1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$A_{ij} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \dots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-1,1} & \dots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & \dots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1} & \dots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & \dots & a_{i+1,n} \\ \vdots & & \vdots & & & \vdots \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \dots & a_{n,n} \end{pmatrix}$$

Exemple 5.
Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Calculons $A_{11}, C_{11}, A_{32}, C_{32}$.

$$A_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad C_{11} = (-1)^{1+1} \det A_{11} = +1.$$

$$A_{32} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$$

$$C_{32} = (-1)^{3+2} \det A_{32} = (-1) \times (-11) = 11.$$

Pour déterminer si $C_{ij} = +\det A_{ij}$ ou $C_{ij} = -\det A_{ij}$, on peut se souvenir que l'on associe des signes en suivant le schéma d'un échiquier :

$$A = \begin{pmatrix} + & - & + & - & \dots \\ - & + & - & + & \dots \\ + & - & + & - & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \end{pmatrix}$$

Donc $C_{11} = +\det A_{11}$, $C_{12} = -\det A_{12}$, $C_{21} = -\det A_{21}$...

4.2. Développement suivant une ligne ou une colonne

Théorème 4 (Développement suivant une ligne ou une colonne).
Formule de développement par rapport à la ligne i :

$$\det A = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det A_{ij} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} C_{ij}$$

Formule de développement par rapport à la colonne j :

$$\det A = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det A_{ij} = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} C_{ij}$$

Démonstration. Nous avons déjà démontré la formule de développement suivant une ligne lors de la démonstration du théorème 1 d'existence et d'unicité du déterminant. Comme $\det A = \det A^T$, on en déduit la formule de développement par rapport à une colonne. □

Exemple 6.
Retrouvons la formule des déterminants 3×3, déjà présentée par la règle de Sarrus, en développement par rapport à la première ligne.

$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} &= a_{11}C_{11} + a_{12}C_{12} + a_{13}C_{13} \\
&= a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \\
&= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{32}a_{23}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{31}a_{23}) \\
&\quad + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22}) \\
&= a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{32}a_{23} + a_{12}a_{31}a_{23} - a_{12}a_{21}a_{33} \\
&\quad + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{31}a_{22}.
\end{aligned}$$

4.3. Exemple

Exemple 7.

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 3 & 1 \\ 4 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

On choisit de développer par rapport à la seconde colonne (car c'est là qu'il y a le plus de zéros) :

$$\begin{aligned}
\det A &= 0C_{12} + 2C_{22} + 3C_{32} + 0C_{42} \\
&\qquad \text{(développement par rapport à la deuxième colonne)} \\
&= +2\begin{vmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} \\
&\qquad \text{on n'oublie pas les signes des cofacteurs et on recommence} \\
&\quad \text{en développant chacun de ces deux déterminants } 3 \times 3 \\
&= +2\left(+4\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} - 0\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}\right) \\
&\qquad \text{(par rapport à la première colonne)} \\
&\quad -3\left(-4\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} - 0\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}\right) \\
&\qquad \text{(par rapport à la deuxième ligne)} \\
&= +2\big(+4 \times 5 - 0 + 1 \times (-4)\big) - 3\big(-4 \times 7 + 1 \times 11 - 0\big) \\
&= 83
\end{aligned}$$

Remarque.
Le développement par rapport à une ligne permet de ramener le calcul d'un déterminant $n \times n$ à celui de n déterminants $(n-1) \times (n-1)$. Par récurrence descendante, on se ramène ainsi au calcul de $n!$ sous-déterminants, ce qui devient vite fastidieux. C'est pourquoi le développement par rapport à une ligne ou une colonne n'est utile pour calculer explicitement un déterminant que si la matrice de départ a beaucoup de zéros. On commence donc souvent par faire apparaître un maximum de zéros par des opérations élémentaires sur les lignes et/ou les colonnes qui ne modifient pas le déterminant, avant de développer le déterminant suivant la ligne ou la colonne qui a le plus de zéros.

4.4. Inverse d'une matrice

Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$ une matrice carrée.
Nous lui associons la matrice C des cofacteurs, appelée ***comatrice***, et notée $\mathrm{Com}(A)$:

$$C = (C_{ij}) = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & \cdots & C_{1n} \\ C_{21} & C_{22} & \cdots & C_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ C_{n1} & C_{n2} & \cdots & C_{nn} \end{pmatrix}$$

Théorème 5.
Soient A une matrice inversible, et C sa comatrice. On a alors

$$\boxed{A^{-1} = \frac{1}{\det A} C^T}$$

Exemple 8.
Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Le calcul donne que $\det A = 2$. La comatrice C s'obtient en calculant 9 déterminants 2×2 (sans oublier les signes $+/-$). On trouve :

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{et donc} \qquad A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot C^T = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

La démonstration se déduit directement du lemme suivant.

Lemme 1.
Soit A une matrice (inversible ou pas) et C sa comatrice. Alors $AC^T = (\det A) I_n$, autrement dit

$$\sum_k a_{ik} C_{jk} = \begin{cases} \det A & \text{si } i = j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Démonstration. Le terme de position (i, j) dans AC^T est $\sum_k a_{ik} C_{jk}$, et donc si $i = j$, le résultat découle de la formule de développement par rapport à la ligne i.
Pour le cas $i \neq j$, imaginons que l'on remplace A par une matrice $A' = (a'_{ij})$ identique, si ce n'est que la ligne L_j est remplacée par la ligne L_i, autrement dit $a'_{jk} = a_{ik}$ pour tout k. De plus, comme A' possède deux lignes identiques, son déterminant est nul. On appelle C' la comatrice de A', et la formule de développement pour la ligne j de A' donne

$$0 = \det A' = \sum_k a'_{jk} C'_{jk} = \sum_k a_{ik} C'_{jk}$$

Or, C'_{jk} se calcule à partir de la matrice extraite A'_{jk}, qui ne contient que les éléments de A' sur les lignes différentes de j et colonnes différents de k. Mais sur les lignes différentes de j, A' est identique à A, donc $C'_{jk} = C_{jk}$. On conclut que $\sum_k a_{ik} C_{jk} = 0$.
Finalement,

$$AC^T = \begin{pmatrix} \det A & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \det A & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & \det A \end{pmatrix} = \det A \cdot I$$

et en particulier, si $\det A \neq 0$, c'est-à-dire si A est inversible, alors on a

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} C^T.$$

□

Mini-exercices.

1. Soient $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} t & 0 & t \\ 0 & t & 0 \\ -t & 0 & t \end{pmatrix}$. Calculer les matrices extraites, les mineurs d'ordre 2 et les

cofacteurs de chacune des matrices A et B. En déduire le déterminant de A et de B. En déduire l'inverse de A et de B lorsque c'est possible.

2. Par développement suivant une ligne (ou une colonne) bien choisie, calculer les déterminants :
$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} t & 0 & 1 & 0 \\ 1 & t & 0 & 0 \\ 0 & 1 & t & 0 \\ 0 & 0 & 0 & t \end{vmatrix}$$
3. En utilisant la formule de développement par rapport à une ligne, recalculer le déterminant d'une matrice triangulaire.

5. Applications des déterminants

Nous allons voir plusieurs applications des déterminants.

5.1. Méthode de Cramer

Le théorème suivant, appelé ***règle de Cramer***, donne une formule explicite pour la solution de certains systèmes d'équations linéaires ayant autant d'équations que d'inconnues. Considérons le système d'équations linéaires à n équations et n inconnues suivant :
$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n & = & b_2 \\ & \dots & \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n & = & b_n \end{cases}$$
Ce système peut aussi s'écrire sous forme matricielle $AX = B$ où
$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{K}), \qquad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}.$$
Définissons la matrice $A_j \in M_n(\mathbb{K})$ par
$$A_j = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1,j-1} & b_1 & a_{1,j+1} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2,j-1} & b_2 & a_{2,j+1} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{n,j-1} & b_n & a_{n,j+1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$
Autrement dit, A_j est la matrice obtenue en remplaçant la j-ème colonne de A par le second membre B. La règle de Cramer va nous permettre de calculer la solution du système dans le cas où $\det A \neq 0$ en fonction des déterminants des matrices A et A_j.

Théorème 6 (Règle de Cramer).
Soit
$$AX = B$$
un système de n équations à n inconnues. Supposons que $\det A \neq 0$. Alors l'unique solution $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ du système est donnée par :
$$x_1 = \frac{\det A_1}{\det A} \qquad x_2 = \frac{\det A_2}{\det A} \qquad \dots \qquad x_n = \frac{\det A_n}{\det A}.$$

Démonstration. Nous avons supposé que $\det A \neq 0$. Donc A est inversible. Alors $X = A^{-1}B$ est l'unique solution du système. D'autre part, nous avons vu que $A^{-1} = \frac{1}{\det A} C^T$ où C est la comatrice. Donc $X = \frac{1}{\det A} C^T B$. En développant,
$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} C_{11} & \dots & C_{n1} \\ \vdots & & \vdots \\ C_{1n} & \dots & C_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} C_{11}b_1 + C_{21}b_2 + \cdots + C_{n1}b_n \\ \vdots \\ C_{1n}b_1 + C_{2n}b_2 + \cdots + C_{nn}b_n \end{pmatrix}$$

C'est-à-dire

$$x_1 = \frac{C_{11}b_1 + \cdots + C_{n1}b_n}{\det A}, \quad x_i = \frac{C_{1i}b_1 + \cdots + C_{ni}b_n}{\det A}, \quad x_n = \frac{C_{1n}b_1 + \cdots + C_{nn}b_n}{\det A}$$

Mais $b_1 C_{1i} + \cdots + b_n C_{ni}$ est le développement en cofacteurs de $\det A_i$ par rapport à sa i-ème colonne. Donc

$$x_i = \frac{\det A_i}{\det A}.$$

□

Exemple 9.
Résolvons le système suivant :

$$\begin{cases} x_1 & & + & 2x_3 & = & 6 \\ -3x_1 & + & 4x_2 & + & 6x_3 & = & 30 \\ -x_1 & - & 2x_2 & + & 3x_3 & = & 8. \end{cases}$$

On a

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -3 & 4 & 6 \\ -1 & -2 & 3 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 6 \\ 30 \\ 8 \end{pmatrix}$$

$$A_1 = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 2 \\ 30 & 4 & 6 \\ 8 & -2 & 3 \end{pmatrix} \qquad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 6 & 2 \\ -3 & 30 & 6 \\ -1 & 8 & 3 \end{pmatrix} \qquad A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 6 \\ -3 & 4 & 30 \\ -1 & -2 & 8 \end{pmatrix}$$

et

$$\det A = 44 \qquad \det A_1 = -40 \qquad \det A_2 = 72 \qquad \det A_3 = 152.$$

La solution est alors

$$x_1 = \frac{\det A_1}{\det A} = -\frac{40}{44} = -\frac{10}{11} \qquad x_2 = \frac{\det A_2}{\det A} = \frac{72}{44} = \frac{18}{11} \qquad x_3 = \frac{\det A_3}{\det A} = \frac{152}{44} = \frac{38}{11}.$$

La méthode de Cramer n'est pas la méthode la plus efficace pour résoudre un système, mais est utile si le système contient des paramètres.

5.2. Déterminant et base

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n. Fixons une base $\mathcal{B}$ de E. On veut décider si n vecteurs $v_1, v_2, \ldots, v_n$ forment aussi une base de E. Pour cela, on écrit la matrice $A \in M_n(\mathbb{K})$ dont la j-ème colonne est formée des coordonnées du vecteur v_j par rapport à la base $\mathcal{B}$ (comme pour la matrice de passage). Le calcul de déterminant apporte la réponse à notre problème.

Théorème 7.
Soit E un $\mathbb{K}$ espace vectoriel de dimension n, et $v_1, v_2, \ldots, v_n$, n vecteurs de E. Soit A la matrice obtenue en juxtaposant les coordonnées des vecteurs par rapport à une base $\mathcal{B}$ de E. Les vecteurs $(v_1, v_2, \ldots, v_n)$ forment une base de E si et seulement si $\det A \neq 0$.

Corollaire 5.
Une famille de n vecteurs de $\mathbb{R}^n$

$$\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{n2} \end{pmatrix} \quad \cdots \quad \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{nn} \end{pmatrix}$$

forme une base si et seulement si $\det(a_{ij}) \neq 0$.

Exemple 10.
Pour quelles valeurs de $a, b \in \mathbb{R}$ les vecteurs

$$\begin{pmatrix} 0 \\ a \\ b \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} a \\ b \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} b \\ 0 \\ a \end{pmatrix}$$

forment une base de $\mathbb{R}^3$? Pour répondre, il suffit de calculer le déterminant

$$\begin{vmatrix} 0 & a & b \\ a & b & 0 \\ b & 0 & a \end{vmatrix} = -a^3 - b^3 .$$

Conclusion : si $a^3 \neq -b^3$ alors les trois vecteurs forment une base de $\mathbb{R}^3$. Si $a^3 = -b^3$ alors les trois vecteurs sont liés. (Exercice : montrer que $a^3 + b^3 = 0$ si et seulement si $a = -b$.)

Démonstration. La preuve fait appel à des résultats du chapitre « Matrices et applications linéaires » (section « Rang d'une famille de vecteurs ») :

$$\begin{aligned} (v_1, v_2, \dots, v_n) \text{ forment une base} &\iff \operatorname{rg}(v_1, v_2, \dots, v_n) = n \\ &\iff \operatorname{rg} A = n \\ &\iff A \text{ est inversible} \\ &\iff \det A \neq 0 \end{aligned}$$

□

5.3. Mineurs d'une matrice

Définition 2.
Soit $A = (a_{ij}) \in M_{n,p}(\mathbb{K})$ une matrice à n lignes et p colonnes à coefficients dans $\mathbb{K}$. Soit k un entier inférieur à n et à p. On appelle ***mineur d'ordre*** k le déterminant d'une matrice carrée de taille k obtenue à partir de A en supprimant $n - k$ lignes et $p - k$ colonnes.

Noter que A n'a pas besoin d'être une matrice carrée.

Exemple 11.
Soit la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 7 \\ 0 & 1 & 6 & 5 \end{pmatrix}$$

- Un mineur d'ordre 1 est simplement un coefficient de la matrice A.
- Un mineur d'ordre 2 est le déterminant d'une matrice 2×2 extraite de A. Par exemple en ne retenant que la ligne 1 et 3 et la colonne 2 et 4, on obtient la matrice extraite $\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$. Donc un des mineurs d'ordre 2 de A est $\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 6$.
- Un mineur d'ordre 3 est le déterminant d'une matrice 3×3 extraite de A. Par exemple, en ne retenant que les colonnes 1, 3 et 4 on obtient le mineur
$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 7 \\ 0 & 6 & 5 \end{vmatrix} = -28$$
- Il n'y a pas de mineur d'ordre 4 (car la matrice n'a que 3 lignes).

5.4. Calcul du rang d'une matrice

Rappelons la définition du rang d'une matrice.

Définition 3.
Le ***rang*** d'une matrice est la dimension de l'espace vectoriel engendré par les vecteurs colonnes. C'est donc le nombre maximum de vecteurs colonnes linéairement indépendants.

Théorème 8.
Le rang d'une matrice $A \in M_{n,p}(\mathbb{K})$ est le plus grand entier r tel qu'il existe un mineur d'ordre r extrait de A non nul.

La preuve sera vue en section 5.6.

Exemple 12.
Soit α un paramètre réel. Calculons le rang de la matrice $A \in M_{3,4}(\mathbb{R})$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & \alpha & 1 \end{pmatrix}$$

- Clairement, le rang ne peut pas être égal à 4, puisque 4 vecteurs de $\mathbb{R}^3$ ne sauraient être indépendants.
- On obtient les mineurs d'ordre 3 de A en supprimant une colonne. Calculons le mineur d'ordre 3 obtenu en supprimant la première colonne, en le développant par rapport à *sa* première colonne :

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & \alpha & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ \alpha & 1 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ \alpha & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = \alpha - 2.$$

  Par conséquent, si $\alpha \neq 2$, le mineur précédent est non nul et le rang de la matrice A est 3.
- Si $\alpha = 2$, on vérifie que les 4 mineurs d'ordre 3 de A sont nuls :

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

  Donc dans ce cas, A est de rang inférieur ou égal à 2. Or $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1$ (lignes $1, 2$, colonnes $1, 2$ de A) est un mineur d'ordre 2 non nul. Donc si $\alpha = 2$, le rang de A est 2.

5.5. Rang d'une matrice transposée

Proposition 6.
Le rang de A est égal au rang de sa transposée A^T.

Démonstration. Les mineurs de A^T sont obtenus à partir des mineurs de A par transposition. Comme les déterminants d'une matrice et de sa transposée sont égaux, la proposition découle de la caractérisation du rang d'une matrice à l'aide des mineurs (théorème 8). □

5.6. Indépendance et déterminant

Revenons sur le théorème 8 et sa preuve avec une version améliorée.

Théorème 9 (Caractérisation de l'indépendance linéaire de p vecteurs)**.**
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n et $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E. Soient $v_1, \dots, v_p$ des vecteurs de E avec $p \leqslant n$. Posons $v_j = \sum_{i=1}^n a_{i,j} e_i$ pour $1 \leqslant j \leqslant n$. Alors les vecteurs $\{v_1, \dots, v_p\}$ forment une famille libre si et seulement s'il existe un mineur d'ordre p non nul extrait de la matrice $A = (a_{i,j}) \in M_{n,p}(\mathbb{K})$.

Démonstration. Supposons d'abord que la famille $\mathscr{F} = \{v_1, \dots, v_p\}$ soit libre.
- Si $p = n$, le résultat est une conséquence du théorème 7.
- Si $p < n$, on peut appliquer le théorème de la base incomplète à la famille $\mathscr{F}$ et à la base $\mathscr{B} = \{e_1, \dots, e_n\}$; et quitte à renuméroter les vecteurs de $\mathscr{B}$, on peut supposer que $\mathscr{B}' = (v_1, \dots, v_p, e_{p+1}, \dots, e_n)$ est une base de E. (Note : cette renumérotation change l'ordre de e_i, autrement dit échange les lignes de la matrice A, ce qui n'a pas d'impact sur ses mineurs ; on appellera encore $\mathscr{B}$ la base renumérotée.) La matrice P de passage de $\mathscr{B}$ vers $\mathscr{B}'$ contient les

composantes des vecteurs $(v_1, \ldots, v_p, e_{p+1}, \ldots, e_n)$ par rapport à la base (renumérotée) $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ c'est-à-dire

$$P = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \ldots & a_{1,p} & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{p,1} & \ldots & a_{p,p} & 0 & \ldots & 0 \\ a_{p+1,1} & \ldots & a_{p+1,p} & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & \ldots & a_{n,p} & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix}$$

Le déterminant $\det P$ est non nul puisque les vecteurs $(v_1, \ldots, v_p, e_{p+1}, \ldots, e_n)$ forment une base de E. Or ce déterminant se calcule en développant par rapport aux dernières colonnes autant de fois que nécessaire (soit $n-p$ fois). Et l'on trouve que

$$\det P = \begin{vmatrix} a_{1,1} & \ldots & a_{1,p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{p,1} & \ldots & a_{p,p} \end{vmatrix}$$

Le mineur $\begin{vmatrix} a_{1,1} & \ldots & a_{1,p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{p,1} & \ldots & a_{p,p} \end{vmatrix}$ est donc non nul.

Montrons maintenant la réciproque. Supposons que le mineur correspondant aux lignes $i_1, i_2, \ldots, i_p$ soit non nul. Autrement dit, la matrice

$$B = \begin{pmatrix} a_{i_1,1} & \ldots & a_{i_1,p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i_p,1} & \ldots & a_{i_p,p} \end{pmatrix}$$

satisfait $\det B \neq 0$. Supposons aussi

$$\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_p v_p = 0$$

En exprimant chaque v_i dans la base $(e_1, \ldots, e_n)$, on voit aisément que cette relation équivaut au système suivant à n lignes et p inconnues :

$$\begin{cases} a_{1,1}\lambda_1 & + & \ldots & + & a_{1,p}\lambda_p & = & 0 \\ a_{2,1}\lambda_1 & + & \ldots & + & a_{2,p}\lambda_p & = & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n,1}\lambda_1 & + & \ldots & + & a_{n,p}\lambda_p & = & 0 \end{cases}$$

Ce qui implique, en ne retenant que les lignes $i_1, \ldots, i_p$:

$$\begin{cases} a_{i_1,1}\lambda_1 & + & \ldots & + & a_{i_1,p}\lambda_p & = & 0 \\ a_{i_2,1}\lambda_1 & + & \ldots & + & a_{i_2,p}\lambda_p & = & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i_p,1}\lambda_1 & + & \ldots & + & a_{i_p,p}\lambda_p & = & 0 \end{cases}$$

ce qui s'écrit matriciellement

$$B \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_p \end{pmatrix} = 0.$$

Comme B est inversible (car $\det B \neq 0$), cela implique $\lambda_1 = \cdots = \lambda_p = 0$. Ce qui montre l'indépendance des v_i. □

Mini-exercices.

1. Résoudre ce système linéaire, en fonction du paramètre $t \in \mathbb{R}$: $\begin{cases} ty + z & = & 1 \\ 2x + ty & = & 2 \\ -y + tz & = & 3 \end{cases}$

2. Pour quelles valeurs de $a, b \in \mathbb{R}$, les vecteurs suivants forment-ils une base de $\mathbb{R}^3$?

$$\begin{pmatrix} a \\ 1 \\ b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2a \\ 1 \\ b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3a \\ 1 \\ -2b \end{pmatrix}$$

3. Calculer le rang de la matrice suivante selon les paramètres $a, b \in \mathbb{R}$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & b \\ 0 & a & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Auteurs du chapitre

- D'après un cours de Sophie Chemla de l'université Pierre et Marie Curie, reprenant des parties d'un cours de H. Ledret et d'une équipe de l'université de Bordeaux animée par J. Queyrut,
- et un cours de Eva Bayer-Fluckiger, Philippe Chabloz, Lara Thomas de l'École Polytechnique Fédérale de Lausanne,
- réécrit et complété par Arnaud Bodin, Niels Borne. Relu par Laura Desideri et Pascal Romon.