MISE EN ROUTE

Exercice 1 – Famille de cubiques

Soit la fonction $f_k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, qui dépend d'un paramètre $k \in \mathbb{R}$, définie par :

$$f_k(x) = x^3 + x^2 - kx + 1$$

1. Calculer la dérivée de f_k et résoudre $f_k'(x) = 0$.
2. En déduire les variations de f_k en fonction du paramètre k. En particulier déterminer où sont atteints les minimums et maximums locaux de f_k. Représenter les différents types de graphes de f_k que l'on peut obtenir.
3. Calculer l'équation de la tangente au graphe de f_k en $x = 1$.

Indications 1 –

Discuter selon les valeurs de k par rapport à $-\frac{1}{3}$.

Correction 1 –

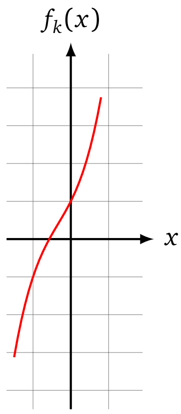
1. $f_k'(x) = 3x^2 + 2x - k$. Pour k fixé, résolvons l'équation $3x^2 + 2x - k = 0$, d'inconnue x. C'est une équation du second degré de discriminant $\Delta = 4(3k+1)$.
   - Si $k < -\frac{1}{3}$, $\Delta < 0$ et alors f_k' ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$.
   - Si $k = -\frac{1}{3}$, $\Delta = 0$ et alors $f_k'(x) = 0$ admet une solution (double) $x_0 = -\frac{1}{3}$.
   - Si $k > -\frac{1}{3}$, $\Delta > 0$, alors $f_k'(x) = 0$ admet deux solutions :

$$x_1 = \frac{-1 - \sqrt{3k+1}}{2} \qquad x_2 = \frac{-1 + \sqrt{3k+1}}{2}.$$

2. Remarquons déjà que, quel que soit $k \in \mathbb{R}$, $\lim_{-\infty} f_k = -\infty$ et $\lim_{+\infty} f_k = +\infty$.
   - Si $k < -\frac{1}{3}$, alors en fait $f_k'(x) > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Ainsi f_k est une fonction strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Cas $k < -\frac{1}{3}$.

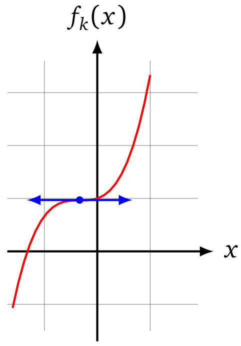
x	$-\infty$	$+\infty$
$f_k'(x)$	$+$	
$f_k(x)$	$-\infty$ $\nearrow$	$+\infty$



   - Si $k = -\frac{1}{3}$, $\Delta = 0$ et alors $f_k'(x) = 0$ admet une solution (double) $x_0 = -\frac{1}{3}$. Alors f_k est aussi strictement croissante sur $\mathbb{R}$, mais avec un point d'inflexion en $x_0 = 0$, où le graphe de f admet une tangente horizontale. La valeur x_0 n'est ni un maximum local, ni un minimum local.

Cas $k = -\frac{1}{3}$.

x	$-\infty$		x_0		$+\infty$
$f_k'(x)$		$+$	0	$+$	
$f_k(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$f_k(x_0)$	$\nearrow$	$+\infty$



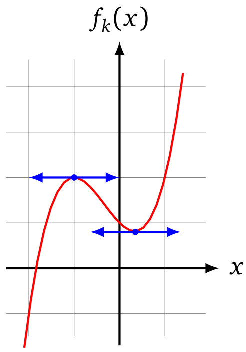
— Si $k > -\frac{1}{3}$, $\Delta > 0$, alors $f_k'(x) = 0$ admet deux solutions :

$$x_1 = \frac{-1-\sqrt{3k+1}}{2} \qquad x_2 = \frac{-1+\sqrt{3k+1}}{2}.$$

$f_k'(x)$ s'annule est x_1 et x_2 ; elle est positive sur $]-\infty, x_1]$ et $[x_2, +\infty[$; elle est négative sur $[x_1, x_2]$. Elle est donc croissante, puis décroissante, puis de nouveau croissante. Elle admet un maximum local en x_1 (de valeur $f_k(x_1)$) et un minimum local en x_2 (de valeur $f_k(x_2)$).

Cas $k > -\frac{1}{3}$.

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
$f_k'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f_k(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$f_k(x_1)$	$\searrow$	$f_k(x_2)$	$\nearrow$	$+\infty$



3. La formule générale d'une tangente au graphe de f au point $(x_0, f(x_0))$ est :

$$y = (x - x_0)f'(x_0) + f(x_0).$$

Avec $x_0 = 1$, on a ici $f_k(1) = 3 - k$ et $f_k'(1) = 5 - k$ et on obtient ainsi l'équation :

$$y = (5-k)x - 2.$$

Exercice 2 – Dérivées

Soient $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux fonctions dérivables. Soient $a, b \in \mathbb{R}$ et $k \in \mathbb{N}$ des constantes. Calculer les dérivées par rapport à la variable x des expressions suivantes.

1. $\ln(f(x)/g(x))$ (on suppose $f > 0$ et $g > 0$).
2. $f(x^2)$, $f(ax+b)$, $f^k(x)$, $f^2(e^x)$.
3. $f(g^2(x))$, $f^2(g(x))$.

Indications 2 –

Il s'agit d'appliquer la formule de la dérivée d'une composition $f \circ g$:

$$(f \circ g)'(x) = f'\big(g(x)\big) \cdot g'(x)$$

Correction 2 –

Rappelons la formule de la dérivée d'une composition $f \circ g$:

$$(f \circ g)'(x) = f'\big(g(x)\big) \cdot g'(x)$$

1. Notons $F_1(x) = \ln(f(x)/g(x))$. On rappelle que la dérivée de $\ln(u(x))$ est $\frac{u'(x)}{u(x)}$. Il est plus simple ici de commencer par utiliser l'identité $\ln(a/b) = \ln(a) - \ln(b)$, donc $F_1(x) = \ln(f(x)) - \ln(g(x))$ et ainsi :
$$F_1'(x) = \frac{f'(x)}{f(x)} - \frac{g'(x)}{g(x)}.$$
2. — Soit $F_2(x) = f(x^2)$. Il s'agit de la composition $f \circ g(x)$ où $g(x) = x^2$ (et donc $g'(x) = 2x$). Ainsi, $F_2'(x) = 2xf'(x^2)$.
   — Soit $F_3(x) = f(ax+b)$. Il s'agit de de la composition $f \circ g(x)$ où $g(x) = ax+b$ (et donc $g'(x) = a$). Ainsi $F_3'(x) = af'(ax+b)$.
   — Soit $F_4(x) = f^k(x) = \big(f(x)\big)^k$. Il s'agit de de la composition $u \circ v(x)$ où $u(x) = x^k$ (et donc $u'(x) = kx^{k-1}$) et $v(x) = f(x)$. Ainsi $F_4'(x) = kf'(x)f^{k-1}(x)$.
   — Soit $F_5(x) = f^2(e^x)$. Il s'agit de de la composition $u \circ v \circ w$ où $u(x) = x^2$ (et donc $u'(x) = 2x$) et $v(x) = f(x)$ et $w(x) = e^x$. On dérive d'abord $v \circ w$: $\big(f(e^x)\big)' = e^x f'(e^x)$, puis $u \circ (v \circ w)$. Ainsi $F_5'(x) = 2e^x f'(e^x) f(e^x)$.
3. On procède de même pour $F_6(x) = f(g^2(x))$: $F_6'(x) = 2 \cdot g'(x) \cdot g(x) \cdot f'\big(g^2(x)\big)$. Et pour $F_7(x) = f^2(g(x))$: $F_7'(x) = 2 \cdot g'(x) \cdot f'(g(x)) \cdot f(g(x))$.

Exercice 3 – Trigonométrie hyperbolique

Le cosinus, sinus et tangente hyperboliques sont les fonctions définies par :
$$\operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \qquad \operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \qquad \operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}$$

1. Montrer la relation $\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1$.
2. Prouver les formules d'addition :
$$\operatorname{ch}(a+b) = \operatorname{ch}(a)\operatorname{ch}(b) + \operatorname{sh}(a)\operatorname{sh}(b)$$
$$\operatorname{sh}(a+b) = \operatorname{sh}(a)\operatorname{ch}(b) + \operatorname{ch}(a)\operatorname{sh}(b)$$
$$\operatorname{th}(a+b) = \frac{\operatorname{th}(a) + \operatorname{th}(b)}{1 + \operatorname{th}(a)\operatorname{th}(b)}$$
3. Calculer les dérivées des trois fonctions ; étudier-les et tracer leur graphe.
4. Montrer que $x \mapsto \operatorname{sh} x$ définie une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On note $\operatorname{argsh}(x)$ sa bijection réciproque. En dérivant la relation $\operatorname{sh}(\operatorname{argsh}(x)) = x$, calculer la dérivée de $\operatorname{argsh}(x)$.
5. Calculer la dérivée de $f(x) = \ln\big(x + \sqrt{x^2+1}\big)$. En déduire une expression pour $\operatorname{argsh} x$.

Correction 3 –

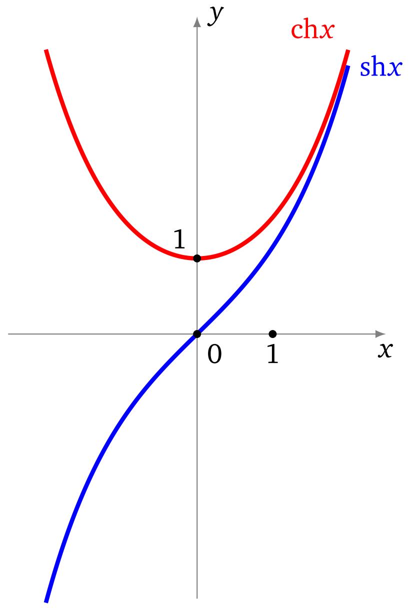
1.
$$\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = \frac{1}{4}\Big((e^x + e^{-x})^2 - (e^x - e^{-x})^2\Big) = \frac{1}{4}\Big((e^{2x} + 2 + e^{-2x}) - (e^{2x} - 2 + e^{-2x})\Big) = 1.$$

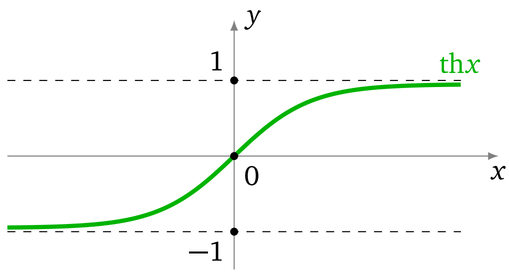
2.
$$4\Big(\operatorname{ch}(a)\operatorname{ch}(b) + \operatorname{sh}(a)\operatorname{sh}(b)\Big) = (e^a + e^{-a})(e^b + e^{-b}) + (e^a - e^{-a})(e^b - e^{-b}) = 2\left(e^{a+b} + e^{-a-b}\right) = 4\operatorname{ch}(a+b)$$

   On procède de même pour $\operatorname{sh}(a+b)$.

$$\frac{\operatorname{th}(a) + \operatorname{th}(b)}{1 + \operatorname{th}(a)\operatorname{th}(b)} = \frac{\frac{\operatorname{sh} a}{\operatorname{ch} a} + \frac{\operatorname{sh} b}{\operatorname{ch} b}}{1 + \frac{\operatorname{sh} a}{\operatorname{ch} a}\frac{\operatorname{sh} b}{\operatorname{ch} b}} = \frac{\frac{\operatorname{sh} a}{\operatorname{ch} a} + \frac{\operatorname{sh} b}{\operatorname{ch} b}}{1 + \frac{\operatorname{sh} a}{\operatorname{ch} a}\frac{\operatorname{sh} b}{\operatorname{ch} b}} \times \frac{\operatorname{ch} a \operatorname{ch} b}{\operatorname{ch} a \operatorname{ch} b} = \frac{\operatorname{sh} a \operatorname{ch} b + \operatorname{sh} b \operatorname{ch} a}{\operatorname{ch} a \operatorname{ch} b + \operatorname{sh} a \operatorname{sh} b} = \frac{\operatorname{sh}(a+b)}{\operatorname{ch}(a+b)} = \operatorname{th}(a+b)$$

3. On a :
$$\mathrm{ch}'(x) = \mathrm{sh}(x) \qquad \mathrm{sh}'(x) = \mathrm{ch}(x) \qquad \mathrm{th}'(x) = \frac{1}{\mathrm{ch}^2(x)} = 1 - \mathrm{th}^2(x).$$
L'étude de ces fonctions ne posent pas de problèmes particuliers. Voici leurs graphes :





4. La fonction $x \mapsto \mathrm{sh}(x)$ est continue, $\lim_{-\infty} \mathrm{sh}(x) = -\infty$ et $\lim_{+\infty} \mathrm{sh}(x) = +\infty$. Comme $\mathrm{sh}'(x) = \mathrm{ch}(x) > 0$ alors la fonction sinus hyperbolique est strictement croissante. Ainsi elle réalise une bijection de $]-\infty, +\infty[$ vers $]-\infty, +\infty[$.
Par définition d'une bijection réciproque on a $\mathrm{sh}(\mathrm{argsh}\, x) = x$ quel que soit $x \in \mathbb{R}$. On souhaite dériver cette identité : à droite on obtient 1 (la dérivée de x), alors qu'à gauche on applique la formule de la dérivée d'une composition. Ainsi :
$$\mathrm{argsh}'(x) \cdot \mathrm{sh}'(\mathrm{argsh}\, x) = 1,$$
donc
$$\mathrm{argsh}'(x) \cdot \mathrm{ch}(\mathrm{argsh}\, x) = 1.$$
Par ailleurs on sait que $\mathrm{ch}^2 u - \mathrm{sh}^2 u = 1$, donc $\mathrm{ch}\, u = +\sqrt{1 + \mathrm{sh}^2 u}$. On applique cette égalité avec $u = \mathrm{argsh}\, x$ et on utilise que $\mathrm{sh}(\mathrm{argsh}\, x) = x$ pour obtenir :
$$\mathrm{argsh}'(x) \cdot \sqrt{1 + \mathrm{sh}^2(\mathrm{argsh}\, x)} = 1.$$
Donc
$$\mathrm{argsh}'(x) \cdot \sqrt{1 + x^2} = 1$$
et ainsi
$$\mathrm{argsh}'(x) = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}.$$
5. La dérivée de $f(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right)$ est $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$. Ainsi $x \mapsto f(x)$ et $x \mapsto \mathrm{argsh}(x)$ ont la même dérivée. En plus ces deux fonctions prennent la même valeur en $x = 0$: $f(0) = 0$ et comme $\mathrm{sh}(0) = 0$ alors on a aussi $\mathrm{argsh}(0) = 0$. Ainsi $f(x) = \mathrm{argsh}(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$:
$$\mathrm{argsh}(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right).$$

Exercice 4 – Encadrements

1. Montrer que $\forall t > 0,\ \left(1 + \frac{1}{t}\right)^t < e$. En déduire $\forall x, y > 0,\ \left(1 + \frac{x}{y}\right)^y < e^x$.
2. Montrer que : $\forall t > 1,\ e < \left(1 + \frac{1}{t-1}\right)^t$. En déduire $\forall x, y > 0,\ e^x < \left(1 + \frac{x}{y}\right)^{x+y}$.

Indications 4 –
Passer au logarithme et étudier une fonction quitte à dériver deux fois.

Correction 4 – 1. Par la croissance du logarithme, l'inégalité $\left(1+\frac{1}{t}\right)^t < e$ est équivalente à $t\ln\left(1+\frac{1}{t}\right) < 1$. Étudions la fonction $f(t) = t\ln\left(1+\frac{1}{t}\right)$ sur $]0,+\infty[$. Sa dérivée est $f'(t) = \ln\left(1+\frac{1}{t}\right) - \frac{1}{t+1}$. Il n'est pas clair de déterminer directement le signe de $f'(t)$, on dérive donc une seconde fois : $f''(t) = -\frac{1}{t(t+1)^2}$. Ainsi $f''(t) < 0$, donc f' est strictement décroissante sur $]0,+\infty[$.

Calculons la limite de $f'(t)$ en $+\infty$. On effectue un développement limité (avec $1/t \to 0$) : $f'(t) \sim \frac{1}{t} - \frac{1}{t+1} = \frac{1}{t(t+1)} \to 0$. Comme f' est strictement décroissante et tend vers 0, alors $f'(t) > 0$ pour tout $t \in]0,+\infty[$. Ainsi f est strictement croissante.

Calculons la limite de f en $+\infty$. $f(t) = t\ln\left(1+\frac{1}{t}\right) \sim t\cdot\frac{1}{t} \to 1$. Comme f est strictement croissante et tend vers 1 alors $f(t) < 1$ pour tout $t \in]0,+\infty[$. Ce qui prouve l'inégalité cherchée. En posant $t = \frac{y}{x}$, on obtient la seconde inégalité.

t	$0 \qquad\qquad +\infty$
$f''(t)$	$-$
$f'(t)$	$\searrow$ 0
$f(t)$	$\nearrow$ 1

2. Il s'agit en fait de prouver l'inégalité $t\ln\left(1+\frac{1}{t-1}\right) > 1$. On étudie cette fois la fonction $g(t) = t\ln\left(1+\frac{1}{t-1}\right)$. L'étude est similaire : $g'(t) = \ln\left(1+\frac{1}{t-1}\right) - \frac{1}{t-1}$, $g''(t) = \frac{1}{t(t-1)^2}$. Par l'étude des variations et des limites, on prouve $g(t) > 1$ pour tout $t > 0$ et l'inégalité voulue. En posant $t = \frac{x+y}{x}$, on obtient la seconde inégalité.

Exercice 5 – Fonction expansive
Soit $f : [0,1] \to [0,1]$ telle que $\forall (x,y) \in [0,1]^2,\ |f(y)-f(x)| \geqslant |x-y|$. Montrer que $f = \mathrm{id}$ ou $f = 1-\mathrm{id}$.

Indications 5 –
Commencer par déterminer quelles sont les valeurs possibles pour $f(0)$ et $f(1)$.

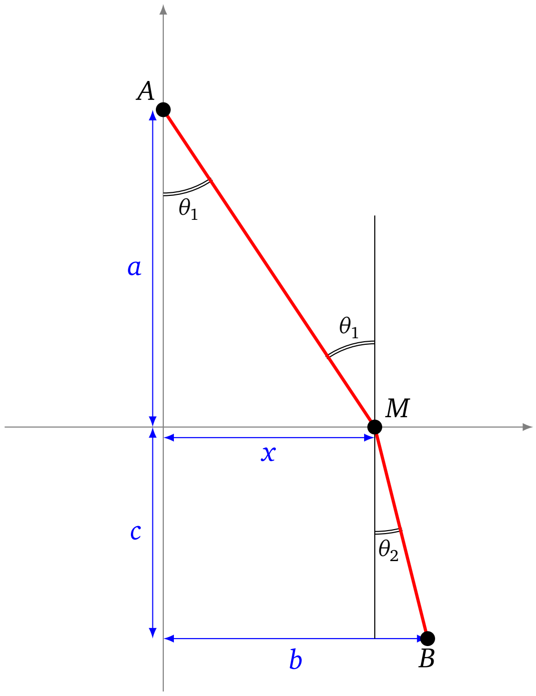
Correction 5 –
— On a $0 \leqslant f(0) \leqslant 1$ et $0 \leqslant f(1) \leqslant 1$. Donc $|f(1)-f(0)| \leqslant 1$. Mais, par hypothèse, $|f(1)-f(0)| \geqslant 1$. Par suite, $|f(1)-f(0)| = 1$ et nécessairement, $(f(0), f(1)) = (0,1)$ ou $(f(0), f(1)) = (1,0)$.
— Supposons que $f(0) = 0$ et $f(1) = 1$ et montrons que $\forall x \in [0,1],\ f(x) = x$. Soit $x \in [0,1]$. On a $|f(x)-f(0)| \geqslant |x-0|$ ce qui fournit $f(x) \geqslant x$. On a aussi $|f(x)-f(1)| \geqslant |x-1|$ ce qui fournit $1-f(x) \geqslant 1-x$ et donc $f(x) \leqslant x$. Finalement, $\forall x \in [0,1],\ f(x) = x$ et $f = \mathrm{id}$.
— Si $f(0) = 1$ et $f(1) = 0$, posons pour $x \in [0,1]$, $g(x) = 1-f(x)$. Alors, $g(0) = 0$, $g(1) = 1$ puis, pour $x \in [0,1]$, $g(x) \in [0,1]$. Enfin,
$$\forall (x,y) \in [0,1]^2,\ |g(y)-g(x)| = |f(y)-f(x)| \geqslant |y-x|.$$
D'après l'étude du premier cas, $g = \mathrm{id}$ et donc $f = 1-\mathrm{id}$.
— Réciproquement, id et $1-\mathrm{id}$ sont bien solutions du problème.

Exercice 6 – Loi de réfraction
Soient dans $\mathbb{R}^2$: $A = (0,a)$, $B = (b,-c)$ et $M = (x,0)$ $(a,b,c > 0)$. Un rayon lumineux parcourt la ligne brisée AMB à la vitesse v_1 de A à M et v_2 de M à B. On note $\theta_1 = \mathrm{angle}(\vec{j}, \vec{MA})$ et $\theta_2 = \mathrm{angle}(-\vec{j}, \vec{MB})$.

1. Faire une figure.
2. Montrer que le temps de parcours est minimal lorsque $\frac{\sin\theta_1}{v_1} = \frac{\sin\theta_2}{v_2}$.

Indications 6 –
Le lien entre temps, distance et vitesse est $v = \frac{d}{t}$. Étudier ensuite la fonction $x \mapsto t(x)$ qui calcule le temps du trajet de A à B en passant par M.

Correction 6 –



Le temps parcouru est

$$t(x) = \frac{MA}{v_1} + \frac{MB}{v_2} = \frac{\sqrt{x^2+a^2}}{v_1} + \frac{\sqrt{(b-x)^2+c^2}}{v_2}.$$

On calcule :

$$t'(x) = \frac{x}{v_1\sqrt{x^2+a^2}} - \frac{b-x}{v_2\sqrt{(b-x)^2+c^2}}$$

Et on remarque que $\sin\theta_1 = x/MA$, $\sin\theta_2 = (b-x)/MB$, donc

$$t'(x) = \frac{\sin\theta_1}{v_1} - \frac{\sin\theta_2}{v_2}.$$

D'un point de vue de la physique, on sait qu'il existe un plus court chemin pour le trajet de la lumière. Pour x_0 associé à ce temps minimal, on a $t'(x_0) = 0$, c'est-à-dire

$$\frac{\sin\theta_1}{v_1} = \frac{\sin\theta_2}{v_2}.$$

D'un point de vue mathématique nous allons étudier la fonction $x \mapsto t(x)$ et montrer que le minimum existe et est unique. Calculons la dérivée seconde :

$$t''(x) = \frac{a^2}{v_1(x^2+a^2)^{3/2}} + \frac{c^2}{v_2((b-x)^2+c^2)^{3/2}}$$

Ainsi $t''(x) > 0$ quel que soit $x \geqslant 0$ donc $x \mapsto t'(x)$ est une fonction strictement croissante. Mais on a vu que la dérivée s'annule en x_0, qui est donc l'unique solution de $t'(x) = 0$. Ainsi $t'(x)$ est négatif avant x_0 et positif après. On détermine alors les variations de $x \mapsto t(x)$ (voir ci-dessous) : la fonction est décroissante avant x_0, puis croissante, elle admet donc un minimum en x_0.

x	0		x_0		$+\infty$
$t''(x)$			$+$		
$t'(x)$		$\nearrow$	0	$\nearrow$	
$t(x)$		$\searrow$	$t_{\min}$	$\nearrow$	$+\infty$

Corrections : Arnaud Bodin. Relecture : Axel Renard.

FONCTIONS DE PLUSIEURS VARIABLES

1 Graphe & co

Exercice 1 – Une fonction de deux variables
Soit f la fonction définie par :
$$f(x,y) = x^4 - 4x^2y + 6y^2$$

1. Calculer $f(1,-2)$.
2. Calculer $f(x,x)$.
3. Calculer $f\left(\frac{1}{y}, \frac{y}{x^2}\right)$.
4. Exprimer $f(tx, t^2y)$ en fonction de t et $f(x,y)$.
5. Montrer que $f(x,y) \geqslant 0$ en exprimant $f(x,y)$ comme somme de deux carrés.
6. Résoudre $f(x,y) = 0$.

Indications 1 –
Pour la positivité de f : $x^4 - 4x^2y + 6y^2 = (x^2-2y)^2 + 2y^2$.

Correction 1 –

1. $f(1,-2) = 33$.
2. $f(x,x) = x^4 - 4x^3 + 6x^2$.
3. $f\left(\frac{1}{y}, \frac{y}{x^2}\right) = \frac{1}{y^4} - \frac{4}{x^2y} + \frac{6y^2}{x^4}$.
4. $f(tx, t^2y) = t^4 f(x,y)$.
5. On reconnaît dans $x^4 - 4x^2y$ le début du carré développé $(x^2-2y)^2$. Ainsi $f(x,y) = x^4 - 4x^2y + 6y^2 = (x^2-2y)^2 + 2y^2$. Cela prouve $f(x,y) \geqslant 0$ quels que soient $x, y \in \mathbb{R}$ car la somme de deux carrés est toujours positive.
6. Pour que cette somme de carrés soit égale à 0, chaque terme doit être nul. Donc d'une part $2y^2 = 0$ et donc $y = 0$. D'autre part $(x^2-2y)^2 = 0$, mais comme $y = 0$, alors $x = 0$. Ainsi, la seule solution de $f(x,y) = 0$ est $(x,y) = (0,0)$.

Exercice 2 – Domaine de définition
Déterminer, puis représenter, le domaine de définition des fonctions suivantes.

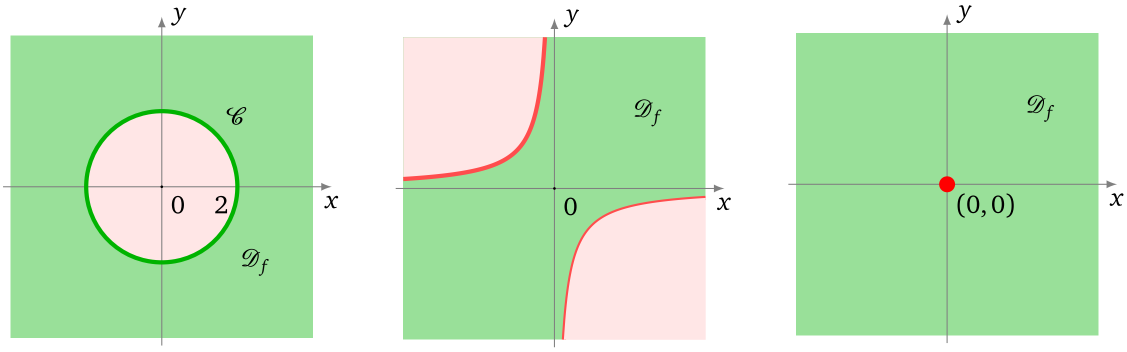
1. $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2-4}$
2. $f(x,y) = \ln(xy+1)$
3. $f(x,y) = \frac{x^2-\sin(y)}{x^2+y^2}$
4. $f(x,y) = \frac{\sqrt{xy}}{x^2+y}$
5. $f(x,y) = \arcsin(|x|+y)$
6. $f(x,y,z) = \frac{1}{3x-2y+z-1}$
7. $f(x,y,z) = \sqrt{x} + \sqrt{1-y^2} + \sqrt{z-1}$

Indications 2 –
Il faut connaître l'équation d'un cercle, d'une droite, d'une parabole, d'une hyperbole, d'un plan...
Il peut aussi être plus facile de déterminer et dessiner les points interdits que les points autorisés.

Correction 2 – 1. $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2-4}$.

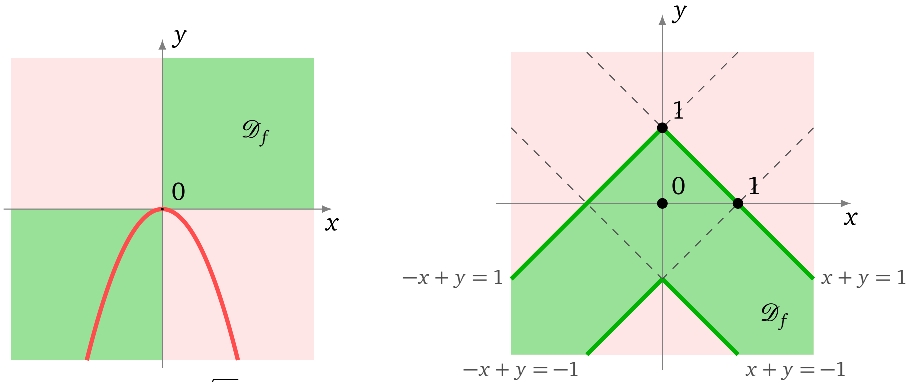
Il faut $x^2+y^2-4 \geqslant 0$. On sait que $x^2+y^2-4=0$ est l'équation du cercle de centre $(0,0)$ et de rayon 2. Les points (x,y) qui vérifient $x^2+y^2-4 \geqslant 0$ sont ceux à l'extérieur de ce cercle (y compris les points du cercle).

Dans les dessins ci-dessous on représente en vert le domaine de définition et en rouge le complémentaire (là où la fonction n'est pas définie).



$f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2-4}$ $\qquad$ $f(x,y)=\ln(xy+1)$ $\qquad$ $f(x,y)=\frac{x^2-\sin(y)}{x^2+y^2}$

2. $f(x,y)=\ln(xy+1)$.
   Il faut $xy+1>0$. On sait que $xy+1=0$ est l'équation d'une hyperbole (comme $xy=-1$, c'est le graphe de la fonction $x \mapsto y=-\frac{1}{x}$). La région $xy+1>0$ est donc délimitée par cette hyperbole ; pour savoir de quel côté elle est située on teste avec des points particuliers. Par exemple $(0,0)$ vérifie bien $xy+1>0$. Donc $\mathscr{D}_f$ correspond à la zone entre les branches de l'hyperbole.
3. $f(x,y)=\frac{x^2-\sin(y)}{x^2+y^2}$.
   La seule condition vient du dénominateur qui ne doit pas s'annuler. Mais $x^2+y^2=0$ si et seulement si $(x,y)=(0,0)$. Le domaine de définition est donc le plan privé de l'origine.
4. $f(x,y)=\frac{\sqrt{xy}}{x^2+y}$.
   Il faut d'une part $xy \geqslant 0$, c'est-à-dire être dans le quadrant $(x \geqslant 0, y \geqslant 0)$ ou le quadrant $(x \leqslant 0, y \leqslant 0)$ et d'autre part $x^2+y \neq 0$, c'est-à-dire ne pas être sur la parabole d'équation $y=-x^2$.



$f(x,y)=\frac{\sqrt{xy}}{x^2+y}$ $\qquad$ $f(x,y)=\arcsin(|x|+y)$

5. $f(x,y)=\arcsin(|x|+y)$.
   La fonction $u \mapsto \arcsin(u)$ est définie pour $u \in [-1,1]$.
   Cas $x \geqslant 0$. $|x|+y \in [-1,1] \iff -1 \leqslant x+y \leqslant 1$. Cela correspond à la bande située entre les deux droites d'équation $x+y=-1$ et $x+y=+1$.
   Cas $x \leqslant 0$. $|x|+y \in [-1,1] \iff -1 \leqslant -x+y \leqslant 1$. Cela correspond à la bande située entre les deux droites d'équation $-x+y=-1$ et $-x+y=+1$.
6. $f(x,y,z)=\frac{1}{3x-2y+z-1}$.
   Le domaine de définition est l'ensemble des triplets $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$ ne vérifiant pas l'équation $3x-2y+z-1=0$. Il s'agit donc de tous les points de l'espace sauf ceux situés sur ce plan : $\mathscr{D}_f=\mathbb{R}^3 \setminus \mathscr{P}$.

Pour dessiner ce plan $\mathscr{P}$ il suffit de trouver trois points lui appartenant, par exemple $A(0,0,1)$, $B(0,1,3)$ et $C(1,0,-2)$.

7. $f(x,y,z) = \sqrt{x} + \sqrt{1-y^2} + \sqrt{z-1}$.

   Il y a trois conditions :
   - $x \geqslant 0$, c'est le demi-espace délimité par le plan $x=0$ et contenant les points d'abscisses positives,
   - $1-y^2 \geqslant 0$, c'est-à-dire $-1 \leqslant y \leqslant 1$, la zone située entre les plans d'équations $y=-1$ et $y=+1$,
   - $z-1 \geqslant 0$, le demi-espace au-dessus du plan $z=1$.

   Ces trois conditions doivent être vérifiées en même temps, le domaine de définition est donc l'intersection des trois régions décrites.

   $$\mathscr{D}_f = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x \geqslant 0, -1 \leqslant y \leqslant 1, z \geqslant 1\right\}$$

   Il s'agit d'une région ayant la forme d'un parallélépipède infini.

Exercice 3 – Graphe

Représenter le graphe des fonctions suivantes.

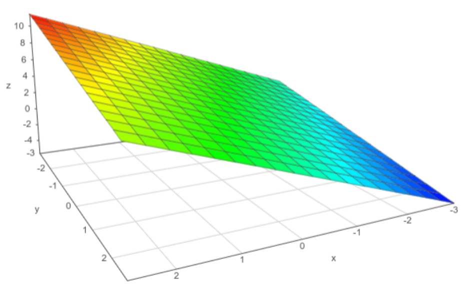
1. $f(x,y) = 2x - y + 3$
2. $f(x,y) = x^2 + 2y^2 + 1$
3. $f(x,y) = x|y|$
4. $f(x,y) = \ln(y - x^2)$
5. $f(x,y) = \sin(x)\sin(y)$

Indications 3 –

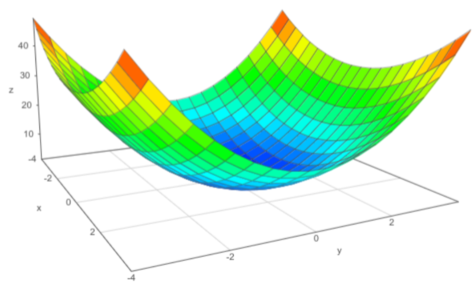
Plusieurs techniques possibles : construire plusieurs points du graphe, reconnaître la figure géométrique, tracer des tranches à x constant et y constant, tracer les lignes de niveau.

Correction 3 –

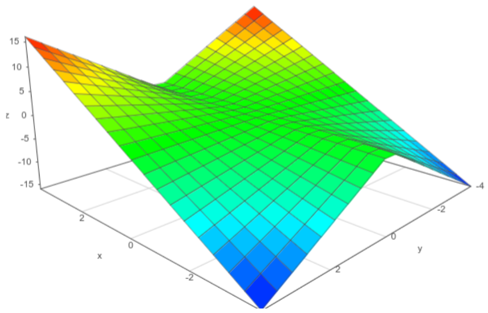
1. $f(x,y) = 2x - y + 3$. C'est l'équation d'un plan. On le trace en trouvant par exemple trois points de ce plan.
2. $f(x,y) = x^2+2y^2+1$. C'est un paraboloïde elliptique : les tranches à x constant sont des paraboles, les tranches à y constant aussi. Les lignes de niveau $x^2+2y^2+1 = k$ sont des ellipses.
3. $f(x,y) = x|y|$. On distingue $y \geqslant 0$ et $y \leqslant 0$. Chaque tranche à x constant est l'union de deux demi-droites (comme le graphe de la valeur absolue). Chaque tranche à y constant est une droite. Noter que pour $y \geqslant 0$, le graphe coïncide avec celui du paraboloïde hyperbolique (la selle de cheval).
4. $f(x,y) = \ln(y-x^2)$. Cette fonction est définie seulement si $y - x^2 > 0$, c'est-à-dire pour les points strictement au-dessus de la parabole $y = x^2$. Pour les points proches de cette parabole les valeurs de f tendent vers $-\infty$.
5. $f(x,y) = \sin(x)\sin(y)$. Chaque tranche à x constant ou y constant est une sinusoïde. Le graphe ressemble à une boite à œufs infinie.



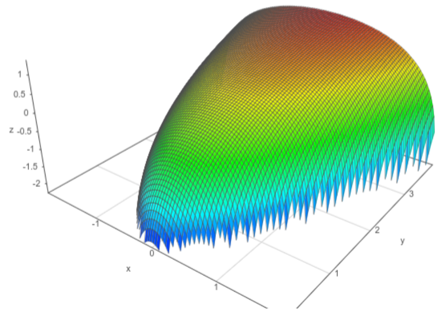
$f(x,y) = 2x - y + 3$



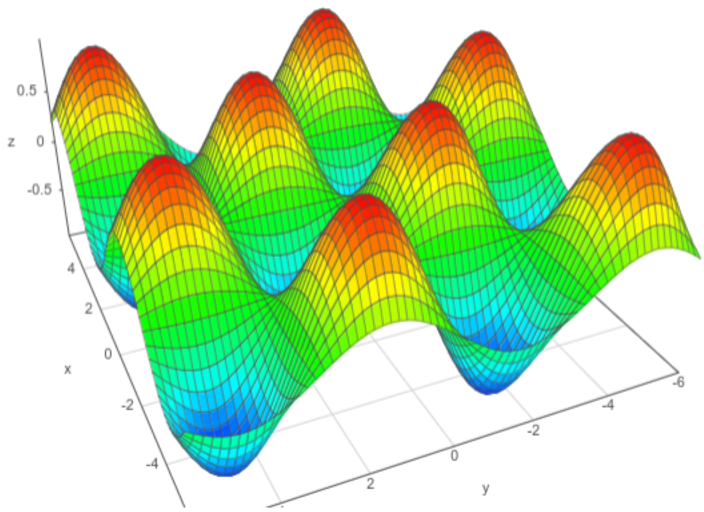
$f(x,y) = x^2 + 2y^2 + 1$



$f(x, y) = x|y|$



$f(x, y) = \ln(y - x^2)$



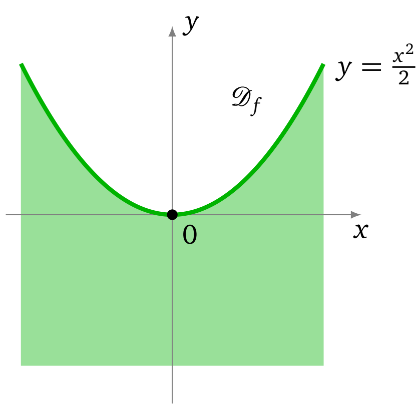
$f(x, y) = \sin(x)\sin(y)$

Exercice 4 – Étude d'une fonction

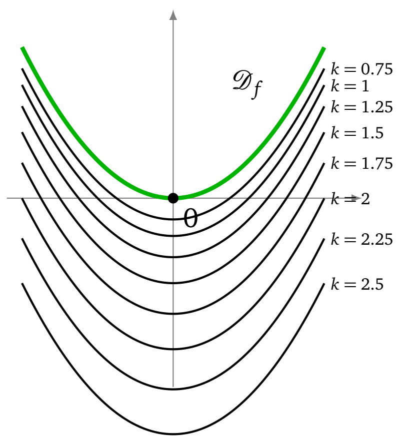
$$f(x, y) = \sqrt{x^2 - 2y}$$

1. Déterminer, puis représenter, le domaine de définition de f.
2. Tracer les lignes de niveau ($f = k$).
3. Tracer l'intersection du graphe de f avec le plan ($x = x_0$). Même question avec ($y = y_0$).
4. Représenter le graphe de f.
5. Déterminer l'image de f.

Correction 4 – 1. $\mathscr{D}_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 - 2y \geqslant 0\}$. Il s'agit donc de l'ensemble des points situés sous la parabole d'équation $y = \frac{x^2}{2}$.

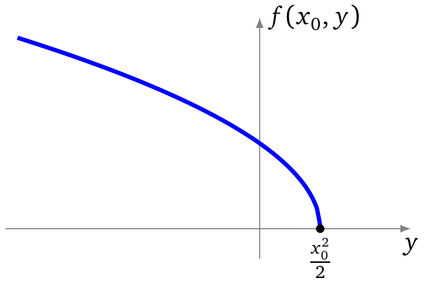


Domaine de définition

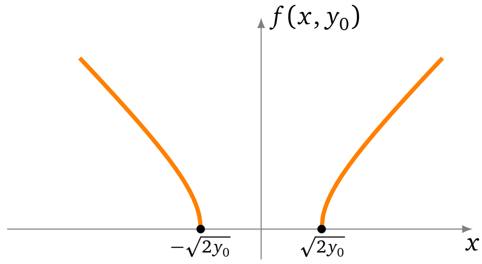


Lignes de niveau

2. Pour $k < 0$, $f(x,y) = k$ n'a pas de solutions et les lignes de niveau sont donc vides. Pour $k \geqslant 0$ fixé, $f(x,y) = k \iff x^2 - 2y = k^2$ est l'équation de la parabole $y = \frac{x^2}{2} - \frac{k^2}{2}$. C'est la même parabole que pour l'ensemble de définition mais translatée vers le bas.
3. L'intersection du graphe de f avec le plan $(x = x_0)$ est le graphe de la fonction d'une variable $y \mapsto f(x_0, y) = \sqrt{x_0^2 - 2y}$. C'est donc le graphe similaire à celui de la fonction racine carrée, mais renversé et décalé vers la droite.
   L'intersection du graphe de f avec le plan $(y = y_0)$ est le graphe de $x \mapsto f(x, y_0) = \sqrt{x^2 - 2y_0}$. Pour x grand, $f(x, y_0) \simeq \sqrt{x^2} = |x|$. On obtient deux asymptotes obliques en $\pm\infty$.

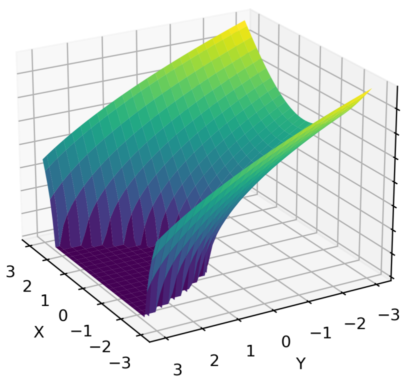


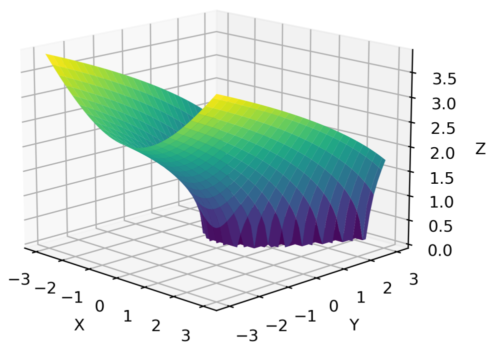
Tranche à x_0 constant



Tranche à y_0 constant

4. Voici deux points de vue du graphe de f.





5. L'image de f est l'ensemble des valeurs possibles prises par f. On a déjà dit que ces valeurs devaient être positives : $\operatorname{Im} f \subset [0, +\infty[$. Réciproquement si $z \geqslant 0$, alors en posant $(x,y) = (z, 0)$ on a $f(x,y) = z$. Ainsi $\operatorname{Im} f = [0, +\infty[$.

Exercice 5 – Lignes de niveau

Déterminer et représenter la ligne de niveau $(f(x,y) = k)$ dans chacun des cas suivants.

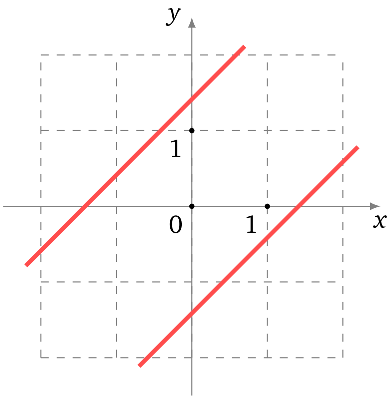
1. $f(x,y) = (x-y)^2$, $k = 2$
2. $f(x,y) = \arctan(x + 3y)$, $k = \frac{\pi}{4}$
3. $f(x,y) = 2x^2 + y^2$, $k = 4$
4. $f(x,y) = x^2 - y^2$, $k = -1$

Indications 5 –

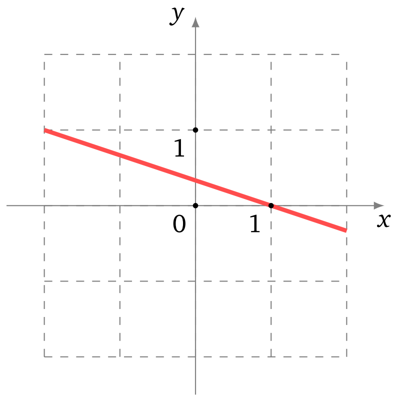
1. Deux droites.
2. Une droite.
3. Une ellipse.
4. Une hyperbole.

Correction 5 –

1. $f(x,y)=(x-y)^2$.
   $f(x,y)=2 \iff (x-y)^2=2 \iff x-y=\pm\sqrt{2}$.
   La ligne de niveau est donc l'union des deux droites parallèles d'équation $x-y=+\sqrt{2}$ et $x-y=-\sqrt{2}$.
2. $f(x,y)=\arctan(x+3y)$.
   $f(x,y)=\frac{\pi}{4} \iff \arctan(x+3y)=\frac{\pi}{4} \iff x+3y=\tan(\frac{\pi}{4}) \iff x+3y=1$.
   La ligne de niveau est la droite d'équation $x+3y=1$.

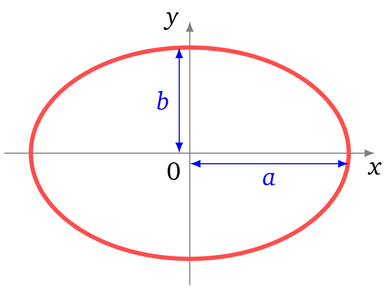


$(x-y)^2=2$

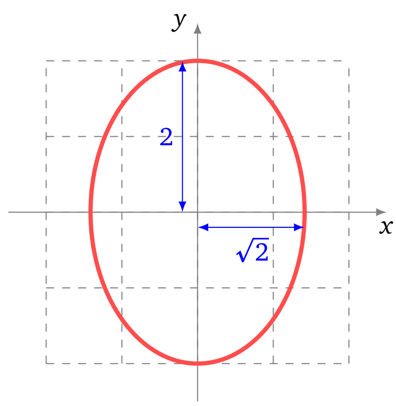


$\arctan(x+3y)=\frac{\pi}{4}$

3. $f(x,y)=2x^2+y^2$.
   $f(x,y)=4 \iff 2x^2+y^2=4 \iff \frac{x^2}{\sqrt{2}^2}+\frac{y^2}{2^2}=1$.
   On sait (ou on devrait savoir) que $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ est l'équation de l'ellipse centrée en $(0,0)$ et de demi-grand axe a (rayon horizontal) et demi-petit axe b (rayon vertical).
   Il s'agit donc ici de l'ellipse ayant pour demi-axes $\sqrt{2}$ et 2, centrée à l'origine.

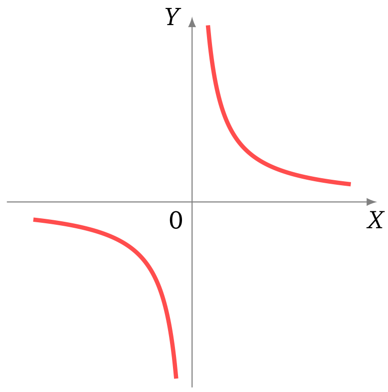


Ellipse $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$

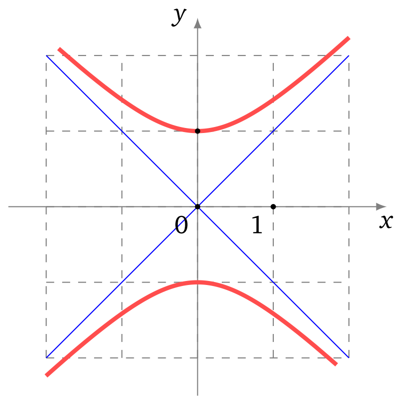


$2x^2+y^2=4$

4. $f(x,y)=x^2-y^2$.
   $f(x,y)=-1 \iff x^2-y^2=-1 \iff (x-y)(x+y)=-1$.
   On sait que $XY=k$ est l'équation d'une hyperbole dont les asymptotes sont les axes X et Y.
   Ici il faut faire le changement de repère $X=x-y$, $Y=x+y$. Il s'agit donc d'une hyperbole ayant pour asymptotes les bissectrices (les droites d'équations $y=x$ et $y=-x$).



Hyperbole $XY=1$

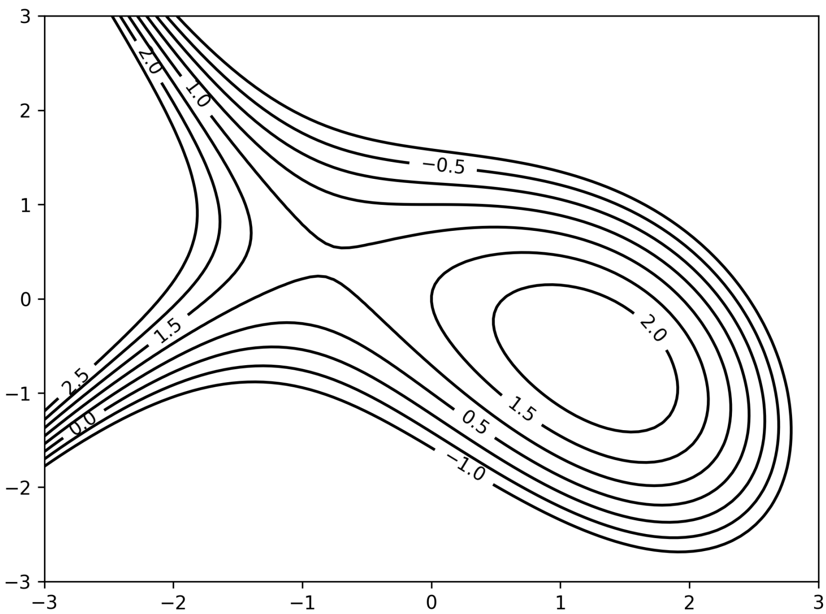


$x^2-y^2=-1$

Exercice 6 – Lignes de niveau

Répondez graphiquement aux questions à l'aide des lignes de niveau de la fonction :

$$f(x,y)=-\frac{x^3}{3}-xy-y^2+x+\frac{3}{2}$$



1. Représenter le graphe de la fonction $y\mapsto f(0,y)$.
2. Représenter le graphe de la fonction $x\mapsto f(x,0)$.
3. Représenter le graphe de f.

Indications 6 –

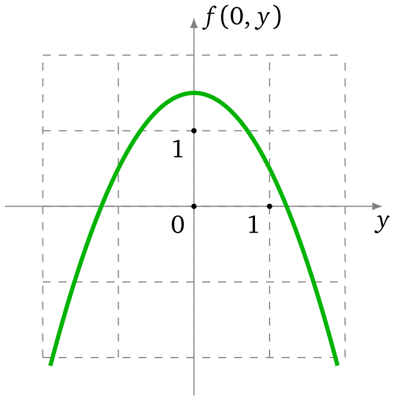
Considérer les lignes de niveau comme une carte topographique avec des altitudes et essayer de visualiser la forme du terrain.

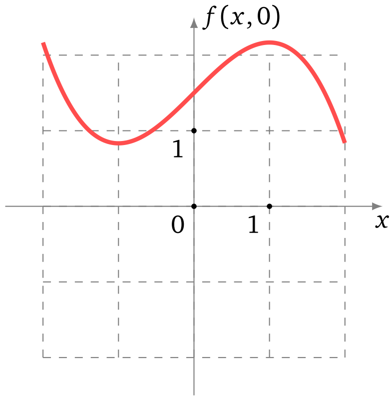
Correction 6 –

On remarque que les lignes sont tracées pour des écarts de valeurs de 0.5.

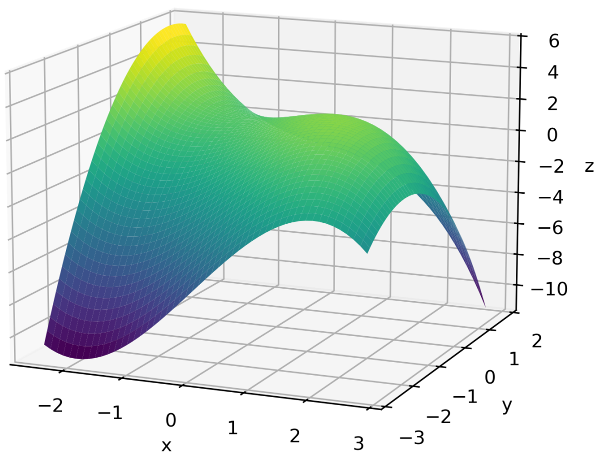
1. Tracer d'abord la droite verticale d'équation $(x=0)$ sur le graphique. Il s'agit de comprendre comment varie $f(0,y)$ lorsque on se déplace sur cette droite. On part du bas de la droite, la première ligne rencontrée a pour niveau -1 (pour $y\simeq-1.5$) ; puis en remontant sur la droite le niveau monte jusqu'à atteindre environ 1.5 (autour de $y=0$) qui sera le maximum ; puis le niveau redescend jusqu'au niveau -1 (pour $y\simeq 1.7$).

2. Pour $x \mapsto f(x,0)$. On trace la droite horizontale d'équation $(y=0)$. Sur cette droite, de la gauche vers la droite, on lit les niveaux de f. Au départ f est plus grande que 2.5, puis diminue, puis remonte, puis diminue.





3. Il s'agit donc d'une sorte de selle de cheval avec en plus un maximum local au-dessus du point $(x_0, y_0) \simeq (1.5, -0.5)$.



Exercice 7 – Équation d'état de van der Waals

L'équation d'état de van der Waals relie la température T, la pression P et le volume V d'un fluide (gaz ou liquide) :

$$\left(P + \frac{an^2}{V^2}\right)(V - nb) = nRT$$

où a, b, R sont des constantes et n la quantité de matière. C'est une amélioration de la loi des gaz parfaits « $PV = nRT$ ».

1. Exprimer la température comme une fonction de la pression et du volume.
2. Exprimer la pression comme une fonction de la température et du volume.
3. Exprimer l'équation polynomiale dont le volume est solution. Quel est le degré de cette équation ? *Physique.* Expliquer pourquoi pour une même température et une même pression on peut avoir deux volumes différents.

Correction 7 –

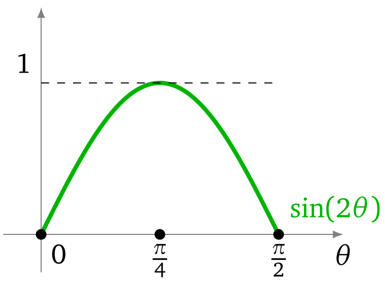
1. Il suffit de réarranger l'équation :
$$T = \frac{1}{nR}\left(P + \frac{an^2}{V^2}\right)(V - nb).$$
2. De même :
$$P = \frac{nRT}{V - nb} - \frac{an^2}{V^2}$$
3. On multiplie l'équation initiale par V^2 pour obtenir :
$$PV^3 - (Pnb + nRT)V^2 + an^2V - an^3b = 0$$
C'est une équation polynomiale de degré 3 d'inconnue V. Ainsi pour une pression P et une température T fixées, plusieurs solutions sont possibles pour le volume V. D'un point de vue mathématique il peut y avoir jusqu'à trois solutions V possibles.
Dans la réalité physique il est possible d'avoir deux volumes différents pour un même couple (pression, température), une solution correspondant à une phase liquide et l'autre à une phase gazeuse du même fluide. Ce sont les conditions de l'expérience et les valeurs antérieures qui déterminent l'état exact du fluide.

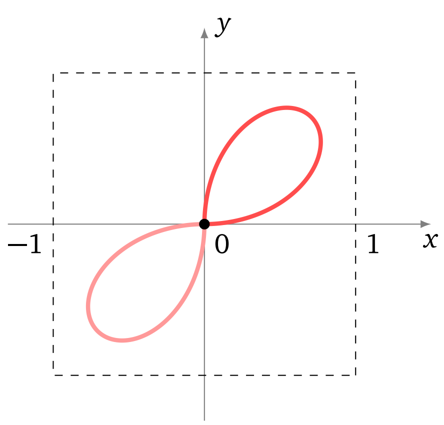
2 Coordonnées polaires

Exercice 8 – Coordonnées polaires
Grâce aux coordonnées polaires, tracer la courbe définie implicitement par la relation $(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}} = 2xy$.

Indications 8 –
Montrer que $r = \sin(2\theta)$.

Correction 8 –
On pose $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ avec $r \geqslant 0$ et $\theta \in [0, 2\pi[$. On a $r = \sqrt{x^2 + y^2}$. L'équation $(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}} = 2xy$ devient $r^3 = 2r^2\cos\theta\sin\theta$, ce qui équivaut (si $r \neq 0$) à $r = 2\cos\theta\sin\theta$, c'est-à-dire :
$$r = \sin(2\theta) \quad \text{et } r \geqslant 0.$$
On a $\sin(2\theta)$ positif pour $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$ et $\theta \in [\pi, \frac{3\pi}{2}]$. Par π-périodicité, on étudie d'abord la fonction $\theta \mapsto \sin(2\theta)$ sur l'intervalle $[0, \frac{\pi}{2}]$ (figure de gauche).
Ensuite pour chaque $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$, on trace le point de coordonnées polaires $[r : \theta]$, (c'est-à-dire le point de coordonnées cartésiennes $(r\cos\theta, r\sin\theta)$) : on voit que $r = \sin(2\theta)$ croît de 0 à 1 sur $[0, \frac{\pi}{4}]$, puis décroît de 1 à 0 sur $[\frac{\pi}{4}, 0]$. On obtient une boucle dans le quadrant supérieur droit ($x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$). Enfin, pour $\theta \in [\pi, \frac{3\pi}{2}]$, on obtient une seconde boucle, symétrique de la première par rapport à l'origine (dans le quadrant $x \leqslant 0$, $y \leqslant 0$).

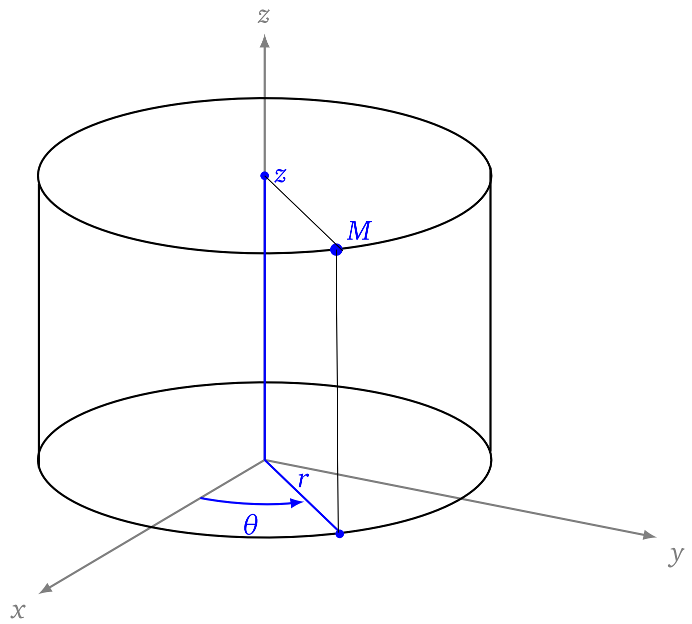




Exercice 9 – Coordonnées de l'espace

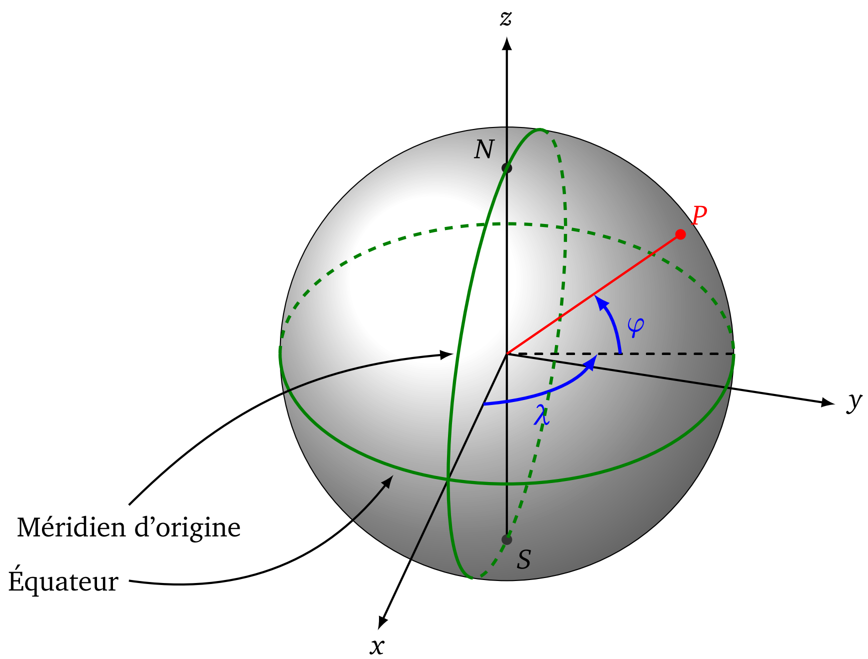
1. Déterminer les coordonnées cartésiennes (x, y, z) d'un point P en fonction de ses coordonnées cylindriques (r, θ, z).

   Pour $x > 0$ et $y > 0$, exprimer les coordonnées cylindriques en fonction des coordonnées cartésiennes.



2. Les coordonnées sphériques (r, φ, λ) sont la donnée d'une altitude r, d'une latitude φ et d'une longitude λ. Déterminer les coordonnées cartésiennes (x, y, z) d'un point P en fonction de ses coordonnées sphériques (r, φ, λ).

   Pour $x > 0$ et $y > 0$, exprimer les coordonnées sphériques en fonction des coordonnées cartésiennes.



Correction 9 – 1. On obtient les coordonnées cartésiennes à partir des coordonnées cylindriques par les formules suivantes :

$$\begin{cases} x &= r\cos(\theta) \\ y &= r\sin(\theta) \\ z &= z \end{cases}$$

Les formules inverses sont similaires à celles pour les coordonnées polaires, pour $x > 0$, $y \geqslant 0$:

$$\begin{cases} r &= \sqrt{x^2+y^2} \\ \theta &= \arctan(y/x) \\ z &= z \end{cases}$$

On a $x > 0,\ y \geqslant 0 \iff \theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$.

2.

$$\begin{cases} x &= r\cos(\varphi)\cos(\lambda) \\ y &= r\cos(\varphi)\sin(\lambda) \\ z &= r\sin(\varphi) \end{cases}$$

Les formules inverses sont, pour $x > 0$, $y \geqslant 0$:

$$\begin{cases} r &= \sqrt{x^2+y^2+z^2} \\ \varphi &= \arcsin\left(\frac{z}{r}\right) \\ \lambda &= \arctan(y/x) \end{cases}$$

On a $x > 0,\ y \geqslant 0 \iff \lambda \in [0, \frac{\pi}{2}]$.

3 Limites

Exercice 10 – Limites
Déterminer les limites lorsqu'elles existent :

1. $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x}{x^2+y^2}$
2. $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(x+2y)^3}{x^2+y^2}$
3. $\lim_{(x,y)\to(1,0)} \frac{\ln(x+e^y)}{\sqrt{x^2+y^2}}$
4. $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4+y^3-xy}{x^4+y^2}$
5. $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1-\cos(xy)}{y^2}$
6. $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3y}{x^4+y^4}$
7. $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(x^2+y^2)^2}{x^2-y^2}$

Indications 10 – 1. Réfuter l'existence de la limite à l'aide de l'étude de limite le long de la courbe $\gamma(t) = (t, 0)$.

2. Utiliser les coordonnées polaires dans le plan.
3. Ce n'est pas une forme indéterminée.
4. Chercher deux courbes dans le domaine de définition qui tendent vers l'origine telles que les limites, calculées le long de ces courbes, existent mais ont des valeurs distinctes.
5. Utiliser les équivalents : $1-\cos u \sim \frac{u^2}{2}$ pour u proche de 0.
6. Pas de limite.
7. Pas de limite.

Correction 10 – 1. Considérons le chemin $\gamma(t)=(t,0)$, alors $f(\gamma(t))=f(t,0)=\frac{1}{t}$ n'a pas de limite lorsque $t\to 0$ (pensez-bien au cas $t>0$ et au cas $t<0$). Donc $f(x,y)$ n'a pas non plus de limite lorsque $(x,y)\to(0,0)$.

2. On pose $x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$. Alors $f(x,y)=f(r\cos\theta,r\sin\theta)=r(\cos\theta+2\sin\theta)^3$. Mais $|\cos\theta+2\sin\theta|\leqslant|\cos\theta|+2|\sin\theta|\leqslant 3$ d'où $|f(x,y)|\leqslant 3^3r$. Lorsque $(x,y)\to 0$ alors $r\to 0$ donc

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{(x+2y)^3}{x^2+y^2}=0.$$

3. $\lim_{(x,y)\to(1,0)}\sqrt{x^2+y^2}=1\neq 0$ et $\lim_{(x,y)\to(1,0)}\ln(x+e^y)=\ln 2$. Nous sommes en présence d'une limite qui n'est pas une forme indéterminée, d'où

$$\lim_{(x,y)\to(1,0)}\frac{\ln(x+e^y)}{\sqrt{x^2+y^2}}=\ln 2.$$

4. On pose $\gamma_1(t)=(t,0)$ et $\gamma_2(t)=(0,t)$. Comme $f(t,0)=1$, alors si $f(x,y)$ admettait une limite en $(0,0)$ ce serait 1. Mais d'autre part $f(0,t)=t\to 0$ (quand $t\to 0$), donc si $f(x,y)$ admettait une limite en $(0,0)$ ce serait 0. Par unicité de la limite, la limite ne peut valoir à la fois 0 et 1, donc $f(x,y)$ n'a pas de limite en $(0,0)$.

5. Lorsque $(x,y)\to(0,0)$ on a $xy\to 0$. Donc $1-\cos(xy)\sim\frac{1}{2}(xy)^2$. Ainsi $f(x,y)\sim\frac{1}{2}\frac{(xy)^2}{y^2}\sim\frac{1}{2}x^2$. Donc $\lim_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)=0$.

6. On pose $\gamma_1(t)=(t,0)$ et $\gamma_2(t)=(t,t)$ et on prouve comme précédemment que $f(x,y)$ n'a pas de limite en $(0,0)$.

7. f n'est pas définie sur les droites d'équations $(y=x)$ et $(y=-x)$. C'est en prenant une courbe tangente à l'une de ces droites que l'on montre que $f(x,y)$ n'a pas de limite en $(0,0)$. Tout d'abord pour $\gamma_1(t)=(t,0)$ on a $f(t,0)=t^2$ donc si une limite de $f(x,y)$ existait cela devrait être 0. Mais pour $\gamma_2(t)=\big(x(t),y(t)\big)=(t,t+t^4)$ (disons avec $t>0$), on a $(x^2+y^2)^2\sim 4t^4$, mais $x^2-y^2=t^2-(t+t^4)^2=-2t^5-t^8\sim-2t^5$. Donc sur le chemin γ_2, $f(t,t+t^4)\sim-\frac{2}{t}$ qui a pour limite $-\infty$ (lorsque $t\to 0^+$). Bilan : $f(x,y)$ n'a pas de limite en $(0,0)$.

Exercice 11 – Double limite
Soit $f:\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}\to\mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x,y)=\frac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}.$$

Montrer que

$$\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0}f(x,y)=0 \qquad\text{et}\qquad \lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0}f(x,y)=0$$

mais que $\lim_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)$ n'existe pas.

Indications 11 –
Diviser le numérateur et le dénominateur par x^2 (resp. y^2) pour déterminer $\lim_{y\to 0}f(x,y)$ (resp. $\lim_{x\to 0}f(x,y)$). Montrer que, calculée le long d'une autre courbe convenable, $\lim_{t\to 0}f(x(t),y(t))$ existe et ne vaut pas zéro.

Correction 11 –
Fixons $x\neq 0$:

$$\lim_{y\to 0}f(x,y)=\lim_{y\to 0}\frac{y^2}{y^2+(1-y/x)^2}=\frac{\lim_{y\to 0}y^2}{\lim_{y\to 0}y^2+(1-y/x)^2}=\frac{0}{1}=0$$

Ainsi $\lim_{x\to 0}\ \lim_{y\to 0}f(x,y)=0$. Supposons que $f(x,y)$ admette une limite ℓ lorsque $(x,y)\to(0,0)$, alors nécessairement on a $\ell=0$.
De même pour $y\neq 0$ fixé $\lim_{x\to 0}f(x,y)=0$. D'où $\lim_{y\to 0}\ \lim_{x\to 0}f(x,y)=0$.

D'autre part, en posant $x(t) = t$ et $y(t) = t$, on a $f(x(t), y(t)) = \frac{t^4}{t^4} = 1$ d'où $\lim_{t\to 0} f(x(t), y(t)) = 1$. Si $f(x, y)$ admettait une limite lorsque $(x, y) \to (0, 0)$, alors nécessairement cette limite vaudrait 1. Mais si elle existe, la limite est unique et ne peut donc pas valoir 0 et 1. Conclusion : la limite de $f(x, y)$ lorsque $(x, y) \to (0, 0)$ n'existe pas.

4 Fonctions continues

Exercice 12 – Prolongement par continuité
Étudier la continuité sur $\mathbb{R}^2$ des fonctions suivantes :

1. $$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2y}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

2. $$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^4y}{x^4+y^6} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

3. $$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy^4}{x^4+y^6} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

4. $$f(x,y) = \begin{cases} y^2 \sin \frac{x}{y} & \text{si } y \neq 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

5. $$f(x,y) = \begin{cases} x e^{\arctan \frac{y}{x}} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

6. $$f(x,y) = \begin{cases} \frac{(x+y)^4}{x^4+y^4} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 1 & \text{sinon.} \end{cases}$$

7. $$f(x,y) = \begin{cases} \frac{e^{xy}-1}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Indications 12 –
Prenons l'exemple de la première fonction : sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ la fonction est continue comme somme, produit, quotient de fonctions continues. Elle est continue en $(0,0)$ si et seulement la limite de $f(x,y)$, lorsque $(x,y) \to (0,0)$ est $f(0,0)$. Ainsi décider si f est continue à l'origine revient à un calcul de limite.

Correction 12 –
Toutes les fonctions sont continues là où elles sont définies par leur expression générale, comme sommes, produits, quotients et compositions de fonctions continues. Il reste à étudier la continuité là où la fonction est définie « à la main ».

1. À l'aide des coordonnées polaires, on voit facilement que $f(x,y) \to 0$ en $(0,0)$. Or $f(0,0) = 0$ donc $f(x,y) \to f(0,0)$ lorsque $(x,y) \to (0,0)$. Ce qui est exactement la définition de f continue en $(0,0)$.
   Bilan : f est continue sur $\mathbb{R} \setminus \{(0,0)\}$ et en $(0,0)$, donc f est continue sur $\mathbb{R}^2$.
2. On remarque que $x^4 + y^6 \geqslant x^4$ donc $|f(x,y)| \leqslant \left|\frac{x^4y}{x^4}\right| = |y|$. Comme $|y| \to 0$, alors $f(x,y) \to f(0,0) = 0$ lorsque $(x,y) \to (0,0)$ et f est continue à l'origine.
3. Soit $\gamma(t) = (t^2, t)$ (avec $t > 0$) alors $f(t^2, t) = \frac{t^5}{t^8+t^6} \sim \frac{t^5}{t^6} \sim \frac{1}{t}$ qui tend vers $+\infty$ lorsque $t \to 0^+$. Ainsi $f(x,y)$ ne peut pas tendre $f(0,0) = 0$. Donc f n'est pas continue à l'origine.

4. Pour $y \neq 0$, $|f(x,y)| \leqslant y^2$. Donc lorsque $(x,y) \to (x_0,0)$, on a $f(x,y) \to 0$. Donc f est continue en tout point de la forme $(x_0,0)$. Ainsi f est continue sur $\mathbb{R}^2$.
5. On sait que $|\arctan(u)| < \frac{\pi}{2}$, donc $e^{\arctan(u)} < e^{\pi/2}$ est bornée. Ainsi $|f(x,y)| < |x|e^{\pi/2} \to 0$ lorsque $(x,y) \to (0,y_0)$. Ainsi f est continue sur $\mathbb{R}^2$.
6. Pour $\gamma(t) = (t,t)$ on trouve $f(t,t) = \frac{(2t)^4}{2t^4} = 8$ qui ne tend pas vers $f(0,0) = 1$ lorsque $t \to 0$. Donc f n'est pas continue en $(0,0)$.
7. On sait $e^u - 1 \sim u$, donc $f(x,y) \sim \frac{xy}{x^2+y^2}$ qui n'a pas de limite en $(0,0)$. Donc f n'est pas continue en $(0,0)$.

Exercice 13 – Une relation à itérer
Trouver les fonctions f continues sur $\mathbb{R}^2$ telles que :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \qquad f(x,y) = f(x+y, x-y).$$

Indications 13 –
Montrer que $f(x,y) = f(2x,2y)$ et itérer encore. Utiliser la continuité en $(0,0)$ afin de montrer que f est une fonction constante.

Correction 13 –
Remarquons d'abord qu'en appliquant deux fois la relation on obtient :

$$f(x,y) = f(x+y, x-y) = f(2x,2y).$$

Ainsi par récurrence on prouve que $f(x,y) = f(2^n x, 2^n y)$ quel que soit $n \in \mathbb{N}^*$. En changeant x en $x/2^n$ et y en $y/2^n$, cette égalité devient :

$$f(x,y) = f\left(\frac{x}{2^n}, \frac{y}{2^n}\right).$$

Notons $c = f(0,0)$. Nous allons prouver que la fonction f est nécessairement la fonction constante égale à c. Fixons $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ et notons $u_n = \left(\frac{x}{2^n}, \frac{y}{2^n}\right)$ une suite de points de $\mathbb{R}^2$ définie pour $n \geqslant 1$. Il est clair que u_n tend vers $(0,0)$ lorsque n tend vers $+\infty$ (souvenez-vous que x et y sont fixés). Comme f est continue en $(0,0)$ et que $u_n \to (0,0)$ alors $f(u_n) \to f(0,0) = c$ (lorsque $n \to +\infty$).
Mais on a vu que $f(u_n) = f(x,y)$ quel que soit $n \geqslant 1$, donc la suite $(f(u_n))_{n\geqslant 1}$ est la suite constante égale à $f(x,y)$ et tend vers c. Ainsi $f(x,y) = c$. Ce raisonnement est vrai quel que soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ et donc f est une fonction constante. Réciproquement une fonction constante vérifie bien la relation de l'énoncé.

Exercice 14 – $\mathbb{R}^2$ est homéomorphe à un disque ouvert
Soit $\|\cdot\|$ une norme de $\mathbb{R}^2$ et $D = \{x \in \mathbb{R}^2 / \|x\| < 1\}$ le disque unité ouvert. Montrer que

$$\begin{array}{rccc} f : & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & D \\ & x & \longmapsto & \dfrac{x}{1+\|x\|} \end{array}$$

est un homéomorphisme.
Vous devrez donc montrer que : (a) f est bien définie, (b) est continue, (c) est bijective, (d) de bijection réciproque également continue.

Correction 14 –

— Pour tout $x \in E$, $\|f(x)\| = \frac{\|x\|}{1+\|x\|} < \frac{\|x\|+1}{\|x\|+1} = 1$. Donc f est bien une application de E dans D.
— Si $y = 0$, pour $x \in E$, $f(x) = y \Leftrightarrow \frac{1}{1+\|x\|}x = 0 \Leftrightarrow x = 0$. Remarque : on note $0 = 0_{\mathbb{R}^2} = (0,0)$.
Soit alors $y \in D \setminus \{0\}$. Pour $x \in E$,

$$f(x) = y \Rightarrow x = (1+\|x\|)y \Rightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}/\ x = \lambda y.$$

Donc un éventuel antécédent de y est nécessairement de la forme λy, $\lambda \in \mathbb{R}$. Réciproquement, pour $\lambda \in \mathbb{R}$, $f(\lambda y) = \frac{\lambda}{1+|\lambda|\,\|y\|} y$ et donc

$$\begin{aligned} f(\lambda y) = y &\Longleftrightarrow \frac{\lambda}{1+|\lambda|\,\|y\|} = 1 \Longleftrightarrow \lambda = 1 + |\lambda|\,\|y\| \\ &\Longleftrightarrow (\lambda \geqslant 0 \text{ et } (1-\|y\|)\lambda = 1) \text{ ou } (\lambda < 0 \text{ et } (1+\|y\|)\lambda = 1) \\ &\Longleftrightarrow \lambda = \frac{1}{1-\|y\|} \text{ (car } \|y\| < 1 \text{ et le second cas est exclu pour des raisons de signe).} \end{aligned}$$

Dans tous les cas, y admet un antécédent par f et un seul à savoir $x = \frac{1}{1-\|y\|} y$. Ainsi,

$$f \text{ est bijective et } \forall x \in D,\ f^{-1}(x) = \frac{1}{1-\|x\|} x.$$

— On sait que l'application $x \mapsto \|x\|$ est continue sur $\mathbb{R}^2$. Donc l'application $x \mapsto \frac{1}{1+\|x\|}$ est continue sur $\mathbb{R}^2$ en tant qu'inverse d'une fonction continue sur $\mathbb{R}^2$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, ne s'annulant pas sur $\mathbb{R}^2$. L'application $x \mapsto \frac{1}{1-\|x\|}$ est continue sur D pour les mêmes raisons. Donc les applications f et f^{-1} sont continues sur $\mathbb{R}^2$ et D respectivement. Ainsi on a montré que l'application f est bien un homéomorphisme.

Corrections : Arnaud Bodin. Relecture : Axel Renard.

NOTIONS DE TOPOLOGIE

1 Norme et produit scalaire

Exercice 1 – Produit scalaire et vecteurs

1. Montrer que si $X = \binom{x}{y}$ et $Y = \binom{x'}{y'}$ sont des vecteurs de $\mathbb{R}^2$ alors
$$\langle X \mid Y \rangle = 3xx' + 2yy'$$
définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}^2$.
2. Même question avec
$$\langle X \mid Y \rangle = 2xx' + yy' + xy' + x'y.$$
3. Soient x, y et z trois réels tels que $x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 1$. Montrer que $(x + 2y + 3z)^2 \leqslant 14$.

Indications 1 –
Les trois axiomes qui définissent un produit scalaire sont : la linéarité à gauche et à droite, la symétrie et le caractère défini positif. Le principal résultat à connaître est l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

Correction 1 –
Rappelons les trois axiomes qui définissent un produit scalaire : la linéarité à gauche et à droite, la symétrie et le caractère défini positif. Il est plus malin de commencer par vérifier la symétrie, ainsi on aura juste à prouver la linéarité à gauche et alors la linéarité à droite en découlera.

1. — Symétrie : $\langle Y \mid X \rangle = 3x'x + 2y'y = \langle X \mid Y \rangle$.
   — Linéarité à gauche, pour $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$:
$$\begin{aligned}\langle \lambda X_1 + \mu X_2 \mid Y \rangle &= 3(\lambda x_1 + \mu x_2)x' + 2(\lambda y_1 + \mu y_2)y' \\ &= \lambda(3x_1x' + 2y_1y') + \mu(3x_2x' + 2y_2y') \\ &= \lambda\langle X_1 \mid Y \rangle + \mu\langle X_2 \mid Y \rangle\end{aligned}$$
   — Positivité : $\langle X \mid X \rangle = 3x^2 + 2y^2 \geqslant 0$. Définie : $\langle X \mid X \rangle = 0 \iff 3x^2 + 2y^2 = 0 \iff X = (0, 0)$.
2. La symétrie et la bilinéarité sont faciles à vérifier.
   Montrons le caractère positif :
$$\langle X \mid X \rangle = 2x^2 + y^2 + 2xy = x^2 + (x + y)^2 \geqslant 0.$$
   Une fois écrit sous la forme de la somme de carrés, il est clair que $\langle X \mid X \rangle = 0 \iff X = (0, 0)$.
3. À un produit scalaire on associe une norme par la formule $\langle X \mid X \rangle = \|X\|^2$. L'inégalité de Cauchy-Schwarz s'écrit : $\langle X \mid Y \rangle^2 \leqslant \|X\|^2\|Y\|^2$.
   Pour cette question on considère le produit scalaire usuel de $\mathbb{R}^3$: si $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ alors $\langle X \mid Y \rangle = xx' + yy' + zz'$.
   On applique l'inégalité de Cauchy-Schwarz aux vecteurs $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, ce qui donne : $(1 \cdot x + 2 \cdot y + 3 \cdot z)^2 \leqslant (x^2 + y^2 + z^2)(1^2 + 2^2 + 3^2)$. Par hypothèse $x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 1$, donc $(x + 2y + 3z)^2 \leqslant 14$.

Exercice 2 – Produit scalaire et intégrales
Soit E l'ensemble des fonctions continues sur un segment $[a, b]$.

1. Montrer que
$$\langle f \mid g\rangle = \int_a^b f(t)g(t)\,dt$$
définit un produit scalaire sur E.
2. Montrer que pour tout $f \in E$:
$$\left(\int_a^b f(t)dt\right)^2 \leqslant (b-a)\int_a^b \big(f(t)\big)^2 dt$$
3. Montrer que pour toute fonction continue et strictement positive sur $[a,b]$:
$$\int_a^b f(t)dt \times \int_a^b \frac{1}{f(t)}dt \geqslant (b-a)^2$$

Indications 2 –
Pour 3. faire $\left\langle \sqrt{f} \mid \frac{1}{\sqrt{f}} \right\rangle$.

Correction 2 –

1. — Symétrie : $\langle f \mid g\rangle = \int_a^b f(t)g(t)\,dt = \langle g \mid f\rangle$.
   — Linéarité à gauche, pour $\lambda,\mu \in \mathbb{R}$: $\langle \lambda f_1 + \mu f_2 \mid g\rangle = \lambda\langle f_1 \mid g\rangle + \mu\langle f_2 \mid g\rangle$ par la linéarité de l'intégrale.
   — Définie positive : $\langle f \mid f\rangle = \int_a^b f^2(t)\,dt \geqslant 0$, par la positivité de l'intégrale. Et comme f continue, si $\langle f \mid f\rangle = 0$ alors $\int_a^b f^2(t)\,dt = 0$ entraîne $f = 0$ (la fonction identiquement nulle sur $[a,b]$).
2. On associe une norme au produit scalaire par la formule
$$\|f\|^2 = \langle f \mid f\rangle = \int_a^b f^2(t)\,dt.$$
On applique l'inégalité de Cauchy-Schwarz à une fonction f quelconque et à la fonction g définie par $g(t) = 1$ (pour tout $t \in [a,b]$) donc : $\langle f \mid g\rangle^2 \leqslant \|f\|^2\|g\|^2$. Comme l'intégrale de $g^2(t) = 1$ vaut $b-a$, on obtient
$$\left(\int_a^b f(t)\cdot 1 \cdot dt\right)^2 \leqslant \int_a^b f^2(t)\,dt \times (b-a).$$
3. On considère les fonctions $\sqrt{f}$ et $\frac{1}{\sqrt{f}}$. On a
$$\left\langle \sqrt{f} \mid \frac{1}{\sqrt{f}} \right\rangle = \int_a^b \sqrt{f}\frac{1}{\sqrt{f}}\,dt = \int_a^b 1\,dt = b-a.$$
On applique l'inégalité de Cauchy-Schwarz $\langle u \mid v\rangle^2 \leqslant \|u\|^2\|v\|^2$ avec $u = \sqrt{f}$ et $v = 1/\sqrt{f}$ qui donne l'inégalité cherchée.

Exercice 3 – Trois normes
Soit $x = (x_1,\dots,x_n) \in \mathbb{R}^n$. On pose
$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i| \qquad \|x\|_2 = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^2\right)^{1/2} \qquad \|x\|_\infty = \max\{|x_i|\ ;\ 1 \leqslant i \leqslant n\}$$

1. Représenter dans $\mathbb{R}^2$ la boule unité fermée $B = \{x = (x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2\ ;\ \|x\| \leqslant 1\}$ pour chacune des normes $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2$ et $\|\cdot\|_\infty$.

2. Démontrer que $\|\cdot\|_1$ est une norme sur $\mathbb{R}^n$.
3. Démontrer, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, que

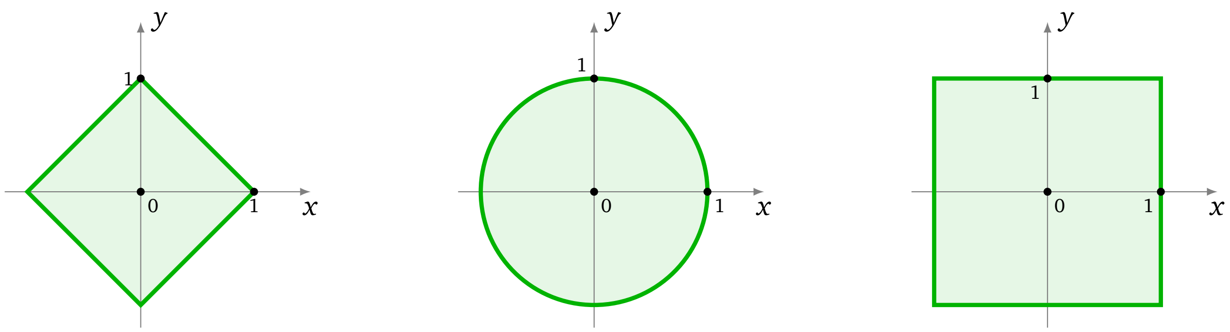
$$\|x\|_\infty \leqslant \|x\|_2 \leqslant \|x\|_1 \leqslant n\|x\|_\infty.$$

4. Affiner certaines inégalités précédentes :

$$\|x\|_2 \leqslant \sqrt{n}\cdot\|x\|_\infty \qquad \text{et} \qquad \|x\|_1 \leqslant \sqrt{n}\cdot\|x\|_2.$$

Indications 3 –
Pour la toute dernière inégalité, penser à Cauchy-Schwarz.

Correction 3 –



Norme 1 | **Norme 2** Norme euclidienne | **Norme infinie**

1. Les boules unités des trois normes sont dessinées ci-dessus.
2. $\|x\|_1 = |x_1| + \cdots + |x_n|$. La preuve que c'est une norme repose sur le fait que la valeur absolue est une norme de $\mathbb{R}$:
   — Positivité : $\|x\|_1 \geqslant 0$ et en plus $\|x\|_1 = 0 \iff |x_1| = 0, \ldots, |x_n| = 0 \iff x = (0, \ldots, 0)$.
   — Homogénéité : pour $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$\|\lambda x\|_1 = |\lambda x_1| + \cdots + |\lambda x_n| = |\lambda||x_1| + \cdots + |\lambda||x_n| = |\lambda|\cdot\|x\|_1.$$

   — Inégalité triangulaire :

$$\|x+y\|_1 = |x_1+y_1| + \cdots + |x_n+y_n| \leqslant |x_1| + |y_1| + \cdots + |x_n| + |y_n| = \|x\|_1 + \|y\|_1.$$

3. — $\|x\|_\infty \leqslant \|x\|_2$.
   Notons $i_{\max}$ un indice tel que $\|x\|_\infty = |x_{i_{\max}}|$. Alors $|x_{i_{\max}}|^2 \leqslant |x_1|^2 + \cdots + |x_n|^2$, donc $\|x\|_\infty^2 \leqslant \|x\|_2^2$.
   — $\|x\|_2 \leqslant \|x\|_1$.
   Développons $\|x\|_1^2 = (|x_1| + \cdots |x_n|)^2 = |x_1|^2 + \cdots + |x_n|^2 + \text{termes croisés} \geqslant |x_1|^2 + \cdots + |x_n|^2 = \|x\|_2^2$.
   — $\|x\|_1 \leqslant n\|x\|_\infty$.
   Pour tout i, $|x_i| \leqslant |x_{i_{\max}}| = \|x\|_\infty$, donc $\|x\|_1 = |x_1| + \cdots + |x_n| \leqslant n\|x\|_\infty$.
4. — $\|x\|_2 \leqslant \sqrt{n}\cdot\|x\|_\infty$.
   $\|x\|_2^2 = |x_1|^2 + \cdots + |x_n|^2 \leqslant n\|x\|_\infty^2$.
   — $\|x\|_1 \leqslant \sqrt{n}\cdot\|x\|_2$.
   On utilise l'inégalité de Cauchy-Schwarz pour le produit scalaire usuel de $\mathbb{R}^n$ entre x et $y = (1, 1, \ldots, 1)$. La norme associée à ce produit scalaire est la norme $\|\cdot\|_2$. L'inégalité est $\langle x \mid y\rangle \leqslant$

$\|x\|_2\|y\|_2$. On a ici $\langle x \mid y\rangle = x_1\cdot 1 + x_2\cdot 1+\cdots+x_n\cdot 1$ et $\|y\|_2 = \sqrt{1+1+\cdots+1} = \sqrt{n}$. Dans le cas où $x_i \geqslant 0$, alors $|x_i| = x_i$ et on a bien prouvé $\|x\|_1 \leqslant \sqrt{n}\|x\|_2$.
Si certains x_i sont négatifs, il faut changer certains signes dans le vecteur y. Plus précisément, on change le $+1$ en un moins -1 pour les rangs i où $x_i < 0$. Une autre façon de faire est d'écrire $y = (\mathrm{sgn}(x_1),\dots,\mathrm{sgn}(x_n))$ où $\mathrm{sgn}(u)$ vaut $+1$ si $u \geqslant 0$ et -1 sinon.

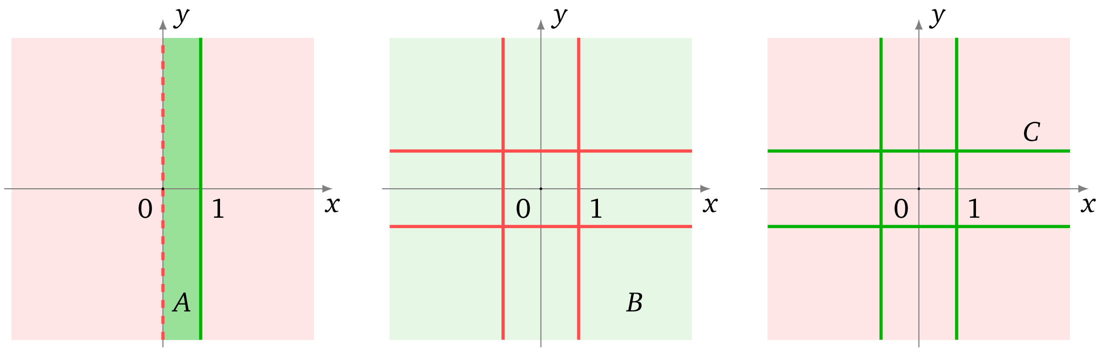
2 Ouverts et fermés

Exercice 4 – Terminologie
Représenter graphiquement les parties suivantes de $\mathbb{R}^2$ et dire pour chacune d'elle si c'est un ouvert, un fermé, ou ni l'un ni l'autre. Déterminer leur adhérence et leur intérieur.

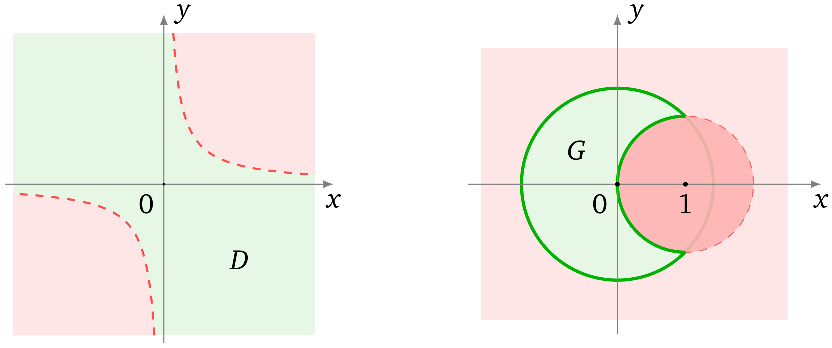
1. $A = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2\ ,\ 0 < x \leqslant 1\}$
2. $B = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2\ ,\ |x| \neq 1 \text{ et } |y| \neq 1\}$
3. $C = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2\ ,\ |x| = 1 \text{ ou } |y| = 1\}$
4. $D = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2\ ,\ 1 - xy > 0\}$
5. $E = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2\ ,\ 3x+4y = 2\}$
6. $F = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2\ , x^2+y^2 = 1\}$
7. $G = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2\ ,\ x^2+y^2 \leqslant 2\} \setminus \{(x,y)\in\mathbb{R}^2\ ,\ (x-1)^2+y^2 < 1\}$
8. $H = \bigcup_{n\in\mathbb{N}^*}\{1/n\}\times[0,1]$

Correction 4 –
On peut utiliser le résultat suivant : les seuls ensembles à la fois ouvert et fermé de $\mathbb{R}^2$ sont l'ensemble vide et $\mathbb{R}^2$. Donc par exemple, si un ensemble autre que $\varnothing$ et $\mathbb{R}^2$ est ouvert, il n'est pas fermé.

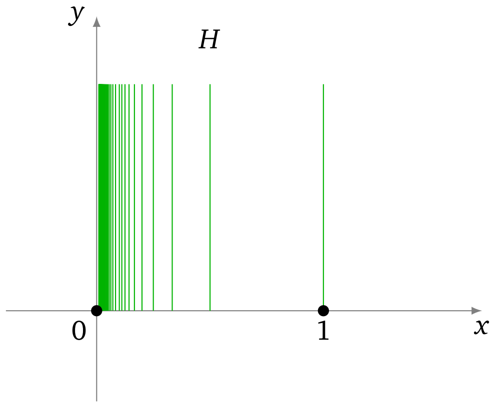
1. $A = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2\ ,\ 0 < x \leqslant 1\}$.
   A est une bande verticale, avec son bord inclus à droite mais pas à gauche.
   A n'est pas ouvert (à cause de l'inégalité large), ni fermé (à cause de l'inégalité stricte). L'adhérence est $\bar{A} = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2\ ,\ 0 \leqslant x \leqslant 1\}$ et l'intérieur est $\mathring{A} = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2\ ,\ 0 < x < 1\}$.



2. $B = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2\ ,\ |x| \neq 1 \text{ et } |y| \neq 1\}$.
   B est tout $\mathbb{R}^2$ privé de deux droites verticales et deux droites horizontales.
   B est ouvert, car on peut par exemple réécrire $x \neq 1 \iff (x < 1 \text{ ou } x > 1)$. Comme B est ouvert $\mathring{B} = B$. B n'est pas fermé. Son adhérence est $\mathbb{R}^2$ tout entier : $\bar{B} = \mathbb{R}^2$.
3. $C = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2\ ,\ |x| = 1 \text{ ou } |y| = 1\}$.
   C est le complémentaire de B : $C = \mathbb{R}^2 \setminus B$. Il est composé de quatre droites.
   Comme B est ouvert, C est fermé. Ainsi $\bar{C} = C$. Comme B n'est pas ouvert, C n'est pas fermé. L'intérieur de C est vide : $\mathring{C} = \varnothing$.
4. $D = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2\ ,\ 1 - xy > 0\}$.
   D est un ensemble de points bordé par l'hyperbole $xy = 1$. On détermine de quel côté sont les points de D en testant des points particuliers (par exemple $(0,0)\in D$, car $(0,0)$ vérifie $1 - xy > 0$).
   D est ouvert, $\mathring{D} = D$. D n'est pas fermé, $\bar{D} = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2\ ,\ 1 - xy \geqslant 0\}$.



5. $E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2\ ,\ 3x+4y=2\}$.
   E est une droite du plan. C'est un ensemble fermé, pas ouvert. $\bar{E} = E$, $\mathring{E} = \varnothing$.
6. $F = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2\ , x^2+y^2=1\}$.
   F est un cercle. C'est un ensemble fermé, pas ouvert. $\bar{F} = F$, $\mathring{F} = \varnothing$.
7. $G = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2\ ,\ x^2+y^2 \leqslant 2\} \setminus \{(x,y) \in \mathbb{R}^2\ ,\ (x-1)^2+y^2 < 1\}$.
   G est un disque, privé d'un autre disque. Notons $G_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2\ ,\ x^2+y^2 \leqslant 2\}$, c'est un disque fermé. Notons $G_2 = \mathbb{R}^2 \setminus \{(x,y) \in \mathbb{R}^2\ ,\ (x-1)^2+y^2 < 1\}$, c'est un fermé en tant que complément d'un disque ouvert. $G = G_1 \cap G_2$ est un fermé en tant qu'intersection de deux fermés. $\bar{G} = G$. G n'est pas un ouvert. Son intérieur est :
   $$\mathring{G} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2\ ,\ x^2+y^2 < 2\} \setminus \{(x,y) \in \mathbb{R}^2\ ,\ (x-1)^2+y^2 \leqslant 1\}.$$
8. $H = \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} \{1/n\} \times [0,1]$.
   H est une union infinie de segments verticaux, un peu comme un peigne, dont les dents seraient de plus en plus proches en se rapprochant de l'origine.



   Ce n'est pas un ouvert (car par exemple une dent est déjà un segment vertical fermé). Ce n'est pas non plus un fermé : en effet soit $x_n = (\frac{1}{n}, 0)$, la suite $(x_n)_{n \geqslant 1}$ est une suite d'éléments de G et tend vers $(0,0) \notin G$. Ainsi par la caractérisation d'un fermé par les suites, G n'est pas fermé.
   L'adhérence de G est $\bar{G} = G \cup (\{0\} \times [0,1])$, c'est-à-dire qu'on rajoute une dent au-dessus de l'origine.
   L'intérieur de G est vide.

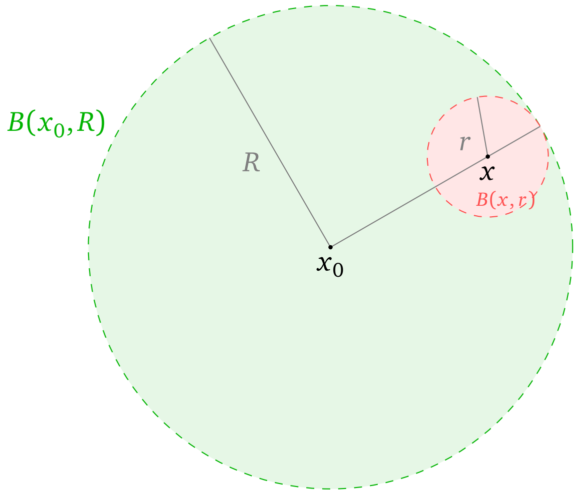
Exercice 5 – Une boule ouverte est un ouvert !

1. Montrer qu'une boule ouverte est un ensemble ouvert.
2. Montrer qu'une boule fermée est un ensemble fermé.
3. Montrer qu'une boule (ouverte ou fermée) de $\mathbb{R}^n$ est un convexe. (Un ensemble E est *convexe* si $A, B \in E$ implique $[AB] \subset E$, où $[AB] = \{(1-t)A + tB \mid t \in [0,1]\}$.)

Indications 5 –
Pour montrer qu'une boule ouverte est un ouvert, pour chaque point x de la boule ouverte il faut trouver une petit boule centrée en x complètement contenue dans la grande boule.

Correction 5 –
Il faut d'abord se convaincre qu'il y a bien quelque chose à prouver ! Ce n'est pas parce qu'un objet est appelé « boule ouverte » que cela en fait par définition un ensemble ouvert. Il faut montrer que c'est le cas afin de justifier que la terminologie est correcte.

1. Soit $B(x_0,R) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x - x_0\| < R\}$ une boule ouverte. Soit $x \in B(x_0,R)$. Pour montrer que $B(x_0,R)$ est un ouvert, il faut trouver $r > 0$ tel que $B(x,r) \subset B(x_0,R)$.
   La distance de x à x_0 est $\|x - x_0\|$ (et est $< R$). La distance entre x et le bord de la boule est $r = R - \|x - x_0\| > 0$.

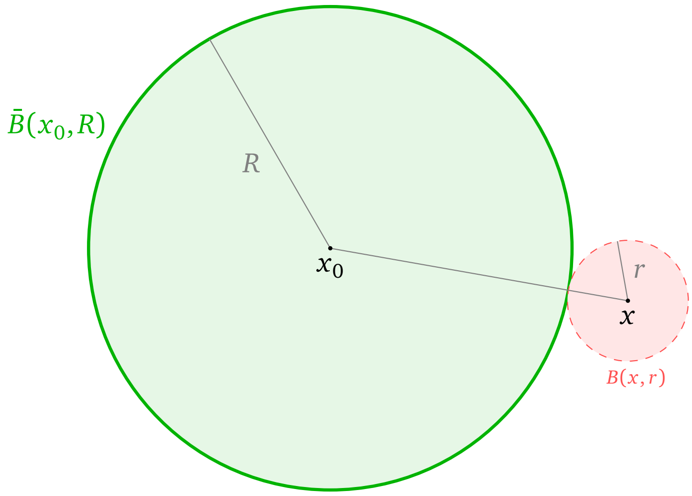


   Montrons que ce r convient, c'est-à-dire $B(x,r) \subset B(x_0,R)$. Soit $y \in B(x,r)$. Alors

$$\|y - x_0\| = \|y - x + x - x_0\| \leqslant \|y - x\| + \|x - x_0\| < r + \|x - x_0\| = R.$$

   Donc $\|y - x_0\| < R$ ce qui prouve $y \in B(x_0,R)$. Ainsi une boule ouverte est bien un ouvert.

2. Soit $\bar{B}(x_0,R) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x - x_0\| \leqslant R\}$ une boule fermée. Pour montrer que $\bar{B}(x_0,R)$, il s'agit par définition de montrer $\mathbb{R}^n \setminus \bar{B}(x_0,R)$ est un ouvert.
   Soit $x \notin \bar{B}(x_0,R)$, c'est-à-dire $\|x - x_0\| > R$. Notons $r = \|x - x_0\| - R$.



   Montrons que $B(x,r) \subset \mathbb{R}^n \setminus \bar{B}(x_0,R)$. Soit $y \in B(x,r)$:

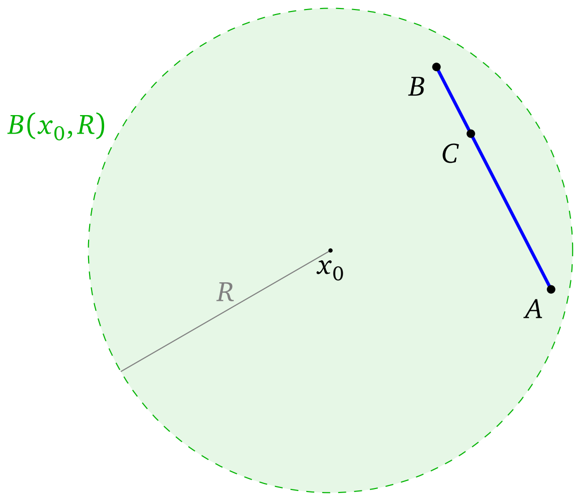
$$\|x - x_0\| = \|(x - y) + (y - x_0)\| \leqslant \|x - y\| + \|y - x_0\|.$$

   Ainsi

$$\|y - x_0\| \geqslant \|x - x_0\| - \|x - y\| > \|x - x_0\| - r = R.$$

   Comme $\|y - x_0\| > R$ alors $y \notin \bar{B}(x_0,R)$. Ainsi une boule fermée est un fermé.

3. Soient $A, B \in B(x_0, R)$. Soit $C = (1-t)A + tB$ avec $t \in [0,1]$. Lorsque t parcourt $[0,1]$, C parcourt le segment $[A, B]$.



On utilise deux fois le fait que $(1-t)+t=1$:

$$\begin{aligned}
\|C - x_0\| &= \|(1-t)A + tB - (1-t+t)x_0)\| \\
&= \|(1-t)(A - x_0) + t(B - x_0)\| \\
&\leqslant |1-t| \cdot \|A - x_0\| + |t| \cdot \|B - x_0\| \\
&\leqslant (1-t)\|A - x_0\| + t\|B - x_0\| \\
&< (1-t)R + tR = R.
\end{aligned}$$

Ainsi $C \in B(x_0, R)$.

Exercice 6 – Union et intersection d'ouverts

1. Montrer que toute union d'ensembles ouverts est un ensemble ouvert.
2. Montrer que toute intersection finie d'ensembles ouverts est un ensemble ouvert. Que peut-on dire des intersections infinies d'ensembles ouverts ?
3. Soient A et B deux parties de $\mathbb{R}^n$. On pose $A + B = \{z \in \mathbb{R}^n \mid \exists x \in A, \exists y \in B, z = x + y\}$. Montrer que si A est ouvert, $A + B$ est ouvert. (Commencer par le cas où B est un singleton.)

Correction 6 – 1. Soit $(O_i)_{i \in I}$ une famille d'ouverts indexée sur un ensemble I éventuellement infini. Montrons que $O = \bigcup_{i \in I} O_i$ est encore un ensemble ouvert.
Soit $x \in O$, il existe $i \in I$ tel que $x \in O_i$. Comme O_i est un ouvert, il existe $r > 0$ tel que $B(x, r) \subset O_i$, mais alors on a aussi $B(x, r) \subset O$. Conclusion : O est un ouvert.

2. (a) Soit $(O_i)_{i \in I}$ une famille d'ouverts indexée sur un ensemble I *fini*. Montrons que $O = \bigcap_{i \in I} O_i$ est encore un ensemble ouvert. Soit $x \in O$, alors pour tout $i \in I$, $x \in O_i$. Comme chaque O_i est un ouvert, il existe $r_i > 0$ tel que $B(x, r_i) \subset O_i$. Notons $r = \min_{i \in I} r_i$, comme I est fini, $r > 0$ et $B(x, r) \subset B(x, r_i) \subset O_i$ quel que soit i. Ainsi $B(x, r) \subset O$. Conclusion : O est un ouvert.
   (b) Notons $I_n =]-\frac{1}{n}, 1 + \frac{1}{n}[$ des intervalles ouverts pour $n \in \mathbb{N}^*$. Alors $\bigcap_{n \geqslant 1} I_n = [0,1]$ est un intervalle fermé. Ainsi une intersection quelconque d'ouverts n'est pas toujours un ouvert.
3. (a) Cas $A + \{b_0\}$ avec A ouvert.
   Soit $x \in A + \{b_0\}$. Il existe $a \in A$ tel que $x = a + b_0$. Comme A est ouvert, il existe $r > 0$ tel que $B(a, r) \subset A$. Mais comme $B(a + b_0, r) = B(a, r) + \{b_0\}$ (faire un dessin) alors $B(a + b_0, r) \subset A + \{b_0\}$. Conclusion : $A + \{b_0\}$ est un ouvert.
   (b) Cas $A + B$ avec A ouvert.
   Soit $x = a + b \in A + B$. On a vu que $A + \{b\}$ est ouvert, donc il existe $r > 0$ tel que $B(x, r) \subset A + \{b\} \subset A + B$. Donc $A + B$ est un ouvert.

On retient de cet exercice :

— Une union quelconque d'ouverts est un ouvert.
— Une intersection finie d'ouverts est un ouvert.

Et on montrerait de même (attention aux changements) :

— Une intersection quelconque de fermés est un fermé.
— Une union finie de fermés est un fermé.

Exercice 7 – Frontière
Soit A une partie d'un espace vectoriel normé E. On rappelle que la *frontière* de A est l'ensemble $\mathrm{Fr}(A) = \bar{A} \backslash \mathring{A}$. Montrer que :

1. $\mathrm{Fr}(A) = \{x \in E \mid \forall \epsilon > 0, B(x,\epsilon) \cap A \neq \varnothing \text{ et } B(x,\epsilon) \cap (E \setminus A) \neq \varnothing\}$
2. $\mathrm{Fr}(A) = \mathrm{Fr}(E \setminus A)$
3. A est fermé si et seulement si $\mathrm{Fr}(A)$ est inclus dans A.
4. A est ouvert si et seulement si $\mathrm{Fr}(A) \cap A = \varnothing$.

Indications 7 – 1. Utiliser les définitions de ouverts et fermés.

2. Utiliser la question précédente.
3. Utiliser la question précédente.
4. Utiliser la question précédente.

Correction 7 – 1. Remarques générales :

— $x \in \bar{A} \iff \forall \epsilon > 0,\ B(x,\epsilon) \cap A \neq \varnothing$.
En effet, par la caractérisation de l'adhérence par les suites, $x \in \bar{A}$ si et seulement si, il existe une suite (x_n), d'éléments de A, telle que $x_n \to x$. En termes de boules cela se traduit par l'équivalence annoncée.
— $x \in \mathring{A} \iff \exists \epsilon > 0,\ B(x,\epsilon) \subset A$.
Cette seconde remarque se traduit en $x \notin \mathring{A} \iff \forall \epsilon > 0, B(x,\epsilon) \not\subset A \iff \forall \epsilon > 0, B(x,\epsilon) \cap (E \setminus A) \neq \varnothing$.

La formule à montrer est la combinaison de ces deux remarques.

2. On sait que le complémentaire d'un complémentaire est l'ensemble initial : $E \setminus (E \setminus A) = A$. Donc si on applique la première question à $\mathrm{Fr}(E \setminus A)$ on trouve :
$$\mathrm{Fr}(E \setminus A) = \{x \in E \mid \forall \epsilon > 0, B(x,\epsilon) \cap (E \setminus A) \neq \varnothing \text{ et } B(x,\epsilon) \cap A \neq \varnothing\} = \mathrm{Fr}(A).$$
3. De façon générale on sait que $A \subset \bar{A}$ et aussi que : A fermé $\iff A = \bar{A}$.
Supposons A fermé, alors $A = \bar{A}$, donc $\mathrm{Fr}(A) = A \setminus \mathring{A}$; en particulier $\mathrm{Fr}(A) \subset A$.
Supposons $\mathrm{Fr}(A) \subset A$, alors $\bar{A} \setminus \mathring{A} \subset A$. Mais on a toujours $\mathring{A} \subset A$ donc $\bar{A} \subset A$. L'autre inclusion étant toujours vraie, alors $\bar{A} = A$, donc A est fermé.
4. $$\begin{aligned} A \text{ ouvert} &\iff E \setminus A \text{ fermé} \\ &\iff \mathrm{Fr}(E \setminus A) \subset E \setminus A \text{ (d'après la question précédente)} \\ &\iff \mathrm{Fr}(A) \subset E \setminus A \text{ (d'après la deuxième question)} \\ &\iff \mathrm{Fr}(A) \cap A = \varnothing. \end{aligned}$$

3 Ensembles compacts

Exercice 8 – Compact ?
Dans $\mathbb{R}^2$ euclidien, les ensembles suivants sont-ils compacts ?

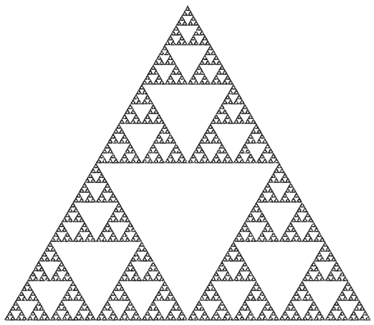
1. $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{1}{2} \leqslant \|(x,y)\| \leqslant 2 \text{ et } xy = 1\}$.
2. $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 < \|(x,y)\| \leqslant 2 \text{ et } y = \frac{1}{2}\}$.
3. $C = \{(n, \cos n) \in \mathbb{R}^2 \mid n \in \mathbb{N}\}$.

Correction 8 – 1. A est l'intersection de deux fermés $A_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{1}{2} \leqslant \|(x,y)\| \leqslant 2\}$ et $A_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy = 1\}$. Il est clair que A_2 est borné (car contenu dans la boule euclidienne de rayon 2). Ainsi A est une partie fermée et bornée, c'est donc un ensemble compact de $\mathbb{R}^2$.

2. B n'est compact car B n'est pas fermé, c'est l'union de deux segments du type $]a,b]$.

3. C n'est pas un ensemble borné car $\|(n, \cos n)\| \to +\infty$ lorsque $n \to +\infty$, donc C n'est pas un ensemble compact.

Exercice 9 – Triangle de Sierpinski



1. Soit $(C_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite décroissante (c'est-à-dire $C_{k+1} \subset C_k$) de compacts non vides de $\mathbb{R}^n$. Montrer que $C = \bigcap_k C_k$ est un ensemble compact *non vide*.

2. Soit T_0 la zone triangulaire de $\mathbb{R}^2$ de sommets $(0,0)$, $(1,0)$, $(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$. Soient les trois transformations affines suivantes :

$$f_1\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \qquad f_2\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\0\end{pmatrix} \qquad f_3\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\frac{1}{4}\\\frac{\sqrt{3}}{4}\end{pmatrix}$$

On note $T_{n+1} = f_1(T_n) \cup f_2(T_n) \cup f_3(T_n)$.

(a) Représenter T_0, T_1, T_2.

(b) Montrer $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite décroissante de compacts. En déduire que le *triangle de Sierpinski* $T = \bigcap_n T_n$ est un ensemble compact non vide.

(c) Calculer l'aire de T_n. Quelle est l'aire de T ?

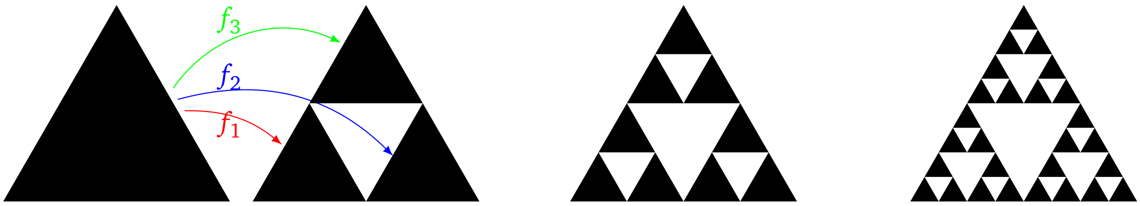
(d) Calculer le périmètre du bord de T_n. Quel est le périmètre du bord de T ?

Correction 9 – 1. Il faut d'abord comprendre que comme $C_{k+1} \subset C_k$ alors $\bigcap_{1\leqslant k\leqslant n} C_k = C_n$. Ainsi $C = \bigcap_k C_k$ est une façon de noter « $\lim_{k\to+\infty} C_k$ ».

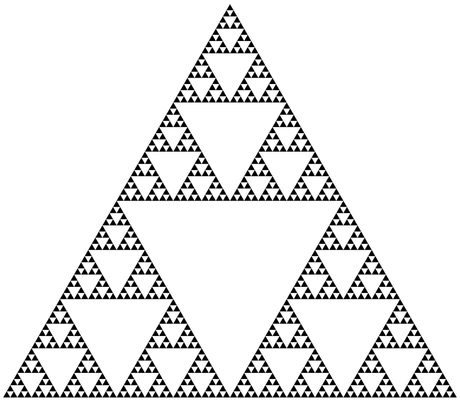
C_0 est par hypothèse un ensemble compact donc fermé et borné. Comme $C = \bigcap_{k\in\mathbb{N}} C_k \subset C_0$ alors C est un ensemble borné. En plus une intersection quelconque d'ensembles fermés est un fermé donc C est un fermé. Bilan : C est fermé et borné donc C est compact.

Il reste à montrer que C est non vide. Pour chaque k, choisissons $x_k \in C_k$. Comme $C_k \subset C$ alors $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est une suite d'éléments de C. Comme C est compact alors $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ admet une sous-suite $(x_{\phi(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ convergente. Notons x_∞ la limite de cette sous-suite. Comme C est fermé alors $x_\infty \in C$. Bilan : C est non vide.

2. (a) Géométriquement la fonction f_1 réalise une homothétie de facteur $\frac{1}{2}$. Ainsi le triangle T_0 est réduit d'un facteur 2 et placé en bas à gauche. Les fonctions f_2 et f_3 réduisent aussi du même facteur, et ajoutent en plus une translation afin de placer le triangle réduit en bas à droite ou en haut.



T_0 T_1 T_2 T_3



T_6

Ainsi on peut comprendre le passage de T_n à T_{n+1} de façon additive : on réduit T_n d'un facteur 2 et on en forme trois copies.

On peut aussi comprendre le passage de T_n à T_{n+1} de façon soustractive : pour chaque triangle (la pointe vers le haut) dans T_n on retire un petit triangle intérieur (la pointe en bas).

Énumération :

— T_n est composé de 3^n petits triangles,

— chaque petit triangle de T_n a une base de longueur de $\frac{1}{2^n}$.

(b) Chaque T_n est un ensemble compact (car borné et fermé en tant qu'union de petits triangles fermés). Par la construction soustractive, il est clair que $T_{n+1} \subset T_n$. Ainsi $(T_n)_{n \geqslant 0}$ est une suite décroissante de compacts non vides donc $T = \bigcap_n T_n$ est un compact non vide (voir la première question).

(c) Aire de T_n. Chaque petit triangle de T_n est un triangle équilatéral de base $\frac{1}{2^n}$ et donc de hauteur $\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{2^n}$; son aire est $\frac{\text{base} \times \text{hauteur}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4} \left(\frac{1}{2^n}\right)^2$. Ainsi l'aire totale des 3^n triangles de T_n est $\mathscr{A}_n = \frac{\sqrt{3}}{4} \frac{3^n}{4^n}$. L'aire de T est la limite de $\mathscr{A}_n$ lorsque $n \to +\infty$, c'est donc 0.

(d) Périmètre de T_n. Chaque petit triangle de T_n a un périmètre de $3\frac{1}{2^n}$. Le périmètre total de T_n est donc $\mathscr{L}_n = 3\frac{3^n}{2^n}$. Lorsque $n \to +\infty$, $\mathscr{L}_n \to +\infty$. Donc T a un périmètre infini.

Conclusion : T est un objet géométrique d'aire nulle mais de longueur infinie !

Exercice 10 – Théorèmes de point fixe

1. Soit $I = [a, b]$ un intervalle compact de $\mathbb{R}$. Montrer que toute fonction continue $f : I \to I$ admet au moins un point fixe.
2. Soit C un ensemble compact de $\mathbb{R}^n$. Soit $f : C \to C$ une application *quasi-contractante*, c'est-à-dire :

$$\text{pour tout } x, y \in C, x \neq y \qquad \|f(x) - f(y)\| < \|x - y\|.$$

   Montrer que f admet un unique point fixe. (Indication : étudier la fonction $\phi(x) = \|f(x) - x\|$.)

Indications 10 – 1. Considérer $\psi(x) = f(x) - x$, $\psi(a)$ et $\psi(b)$.

2. Une fonction continue sur un compact...

Correction 10 – 1. Soit $\psi(x) = f(x) - x$. La fonction ψ est continue car f est continue. D'une part $\psi(a) = f(a) - a \geqslant 0$ car $f(a) \in [a, b]$ et d'autre part $\psi(b) = f(b) - b \leqslant 0$ car $f(b) \in [a, b]$. Par le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $c \in [a, b]$ tel que $\psi(c) = 0$. Pour ce c on a $f(c) - c = 0$, soit $f(c) = c$.

2. Unicité. Si f admettait deux points fixes distincts c et d, on aurait $\|c - d\| = \|f(c) - f(d)\| < \|c - d\|$, ce qui est impossible.

   Existence. La fonction $\phi(x) = \|f(x) - x\|$ est continue de C dans $\mathbb{R}^+$ et C est un ensemble compact par hypothèse. En vertu du théorème des valeurs extrêmes, elle atteint son minimum en un point c. Supposons par l'absurde $\phi(c) > 0$, c'est-à-dire $c \neq f(c)$. On aurait $\phi(f(c)) = \|(f \circ f)(c) - f(c)\| < \|f(c) - c\| = \phi(c)$, contredisant la minimalité de $\phi(c)$. Conclusion : un tel c est bien un minimum pour ϕ.

Exercice 11 – Point de Fermat
Soit A, B, C trois points du plan. Démontrer qu'il existe un point M inclus dans le triangle ABC pour lequel la somme des distances $MA + MB + MC$ est minimale.

Indications 11 –
On demande de montrer que ce point réalisant le minimum existe, on ne demande pas de trouver sa position.

Correction 11 –
Notons $\mathscr{T}$ les points du triangle ABC (c'est-à-dire les points intérieurs au triangle et les points du bord du triangle). Soit $\phi : \mathscr{T} \to \mathbb{R}$ la fonction qui à un point M du triangle associe la distance aux trois sommets :

$$\phi(M) = MA + MB + MC.$$

Une fonction distance, comme $M \mapsto MA = \|MA\|$, est une fonction continue, car c'est la valeur de la norme (euclidienne). Ainsi ϕ est une fonction continue. En plus $\mathscr{T}$ est un compact de $\mathbb{R}^2$ (car c'est un ensemble fermé et borné). Par le théorème des valeurs extrêmes, ϕ est bornée et atteint ses bornes. En particulier, il existe un point $F \in \mathscr{T}$ tel que $FA + FB + FC$ soit minimal.
Ce point F s'appelle le point de Fermat. Il existe une construction géométrique de ce point.

Corrections : Arnaud Bodin. Relecture : Axel Renard.

CALCUL DIFFÉRENTIEL

1 Dérivées partielles et dérivée directionnelle

Exercice 1 – Dérivées partielles
Déterminer, pour chacune des fonctions suivantes, le domaine de définition. Pour chacune de ces fonctions, calculer ensuite les dérivées partielles en chaque point du domaine de définition lorsqu'elles existent :

1. $f(x,y) = x^2 \exp(xy)$
2. $f(x,y) = \ln(x + \sqrt{x^2+y^2})$
3. $f(x,y) = \sin^2 x + \cos^2 y$
4. $f(x,y,z) = x^2 y^2 \sqrt{z}$

Indications 1 –
Pour calculer les dérivées partielles par rapport à une variable, interpéter les autres variables comme paramètres et utiliser les règles ordinaires de calcul de la dérivée.

Correction 1 –

1. $D_f = \mathbb{R}^2$.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x\exp(xy) + x^2 y \exp(xy)$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = x^3 \exp(xy)$$

2. $D_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0 \text{ ou } y \neq 0\}$ (remarquer qu'on a toujours $x + \sqrt{x^2+y^2} \geqslant 0$ car $|x| \leqslant \sqrt{x^2+y^2}$).

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1 + \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}}{x + \sqrt{x^2+y^2}} = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}}{x + \sqrt{x^2+y^2}} = \frac{y}{x\sqrt{x^2+y^2} + x^2 + y^2}$$

3. $D_f = \mathbb{R}^2$.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2\sin x \cos x = \sin(2x)$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = -2\sin y \cos y = -\sin(2y)$$

4. $D_f = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z \geqslant 0\}$.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2xy^2\sqrt{z}$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2x^2 y\sqrt{z}$$
$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{x^2y^2}{2\sqrt{z}} \quad (z \neq 0)$$

Exercice 2 – Dérivées partielles et directionnelles
Soit f la fonction sur $\mathbb{R}^2$ définie par $f(x,y) = x\cos y + y\exp x$.

1. Calculer ses dérivées partielles.
2. Soit $v = (\cos\theta, \sin\theta)$, $\theta \in [0, 2\pi[$. Calculer $D_v f(0,0)$. Pour quelles valeurs de θ cette dérivée directionnelle de f est-elle maximale/minimale ? Que cela signifie-t-il ?

Indications 2 –
Interpréter la dérivée directionnelle à l'aide de l'intersection du graphe de la fonction avec un plan convenable.

Correction 2 – 1.
$$\frac{\partial f}{\partial x} = \cos y + y\exp x \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = -x\sin y + \exp x.$$

2. Comme est différentiable alors
$$D_v f(0,0) = \cos\theta \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) + \sin\theta \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \cos\theta + \sin\theta = \sqrt{2}\sin\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right).$$
Cette dérivée directionnelle de f est maximale quand $\sin\theta = \cos\theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$, c'est-à-dire quand $\theta = \frac{\pi}{4}$, et minimale quand $\sin\theta = \cos\theta = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, c'est-à-dire quand $\theta = \frac{5}{4}\pi$.
Signification géométrique : Le plan engendré par le vecteur $(\cos\theta, \sin\theta, 0)$ et l'axe des z rencontre le graphe $z = f(x,y)$ en une courbe. Cela revient à prendre une tranche du graphe de f dans la direction du vecteur. Cette courbe est de pente maximale en valeur absolue pour $\cos\theta = \sin\theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$ et $\cos\theta = \sin\theta = -\frac{\sqrt{2}}{2}$. Les deux signes s'expliquent par les deux orientations possibles de cette courbe (dans un sens on monte le plus possible, dans l'autre on descend le plus possible).

Exercice 3 – Une fonction puissance
Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x,y) = (x^2+y^2)^x$ pour $(x,y) \neq (0,0)$ et $f(0,0) = 1$.

1. La fonction f est-elle continue en $(0,0)$?
2. Déterminer les dérivées partielles de f en un point quelconque distinct de l'origine.
3. La fonction f admet-elle des dérivées partielles par rapport à x et à y en $(0,0)$?

Indications 3 –
On rappelle que $a^b = e^{b\ln(a)}$ pour $a > 0$ et $b \in \mathbb{R}$.

1. Utiliser les coordonnées polaires (r,θ) dans le plan et le fait que $\lim_{\substack{r\to 0\\ r>0}} r\ln r = 0$.

Correction 3 – 1.
$$f(x,y) = (x^2+y^2)^x = e^{x\ln(x^2+y^2)} = e^{2r\cos\theta\ln r}.$$
Puisque $\cos\theta$ est borné, $\lim_{\substack{r\to 0\\ r>0}} 2r\cos\theta\ln r = 0$ d'où :
$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ (x,y)\neq(0,0)}} f(x,y) = e^0 = 1,$$
car la fonction exponentielle est continue.

2. Dans $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ les dérivées partielles par rapport aux variables x et y se calculent ainsi :
$$\frac{\partial f}{\partial x} = \left(\ln(x^2+y^2) + \frac{2x^2}{x^2+y^2}\right)(x^2+y^2)^x$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = \left(\frac{2xy}{x^2+y^2}\right)(x^2+y^2)^x$$

3. Calculons le taux d'accroissement définissant la dérivée partielle $\frac{\partial f}{\partial x}$ en $(0,0)$ (en se limitant au cas $x>0$) :
$$\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x}=\frac{(x^2)^x-1}{x}=\frac{e^{2x\ln x}-1}{x}\sim\frac{(1+2x\ln x)-1}{x}\sim 2\ln x.$$
Lorsque $x\to 0$, le taux d'accroissement n'a pas une limite finie, donc $\frac{\partial f}{\partial x}$ n'existe pas en $(0,0)$.
Par contre,
$$\frac{f(0,y)-f(0,0)}{y}=\frac{(y^2)^0-1}{y}=0.$$
Donc $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$ existe et vaut 0.

Exercice 4 – Dérivées directionnelles

1. Calculer la dérivée directionnelle de la fonction $f(x,y)=e^{x^2+y^2}$ au point $P(1,0)$ suivant la bissectrice du premier quadrant.
2. Calculer la dérivée directionnelle de la fonction $f(x,y,z)=x^2-3yz+5$ au point $P(1,2,1)$ dans une direction formant des angles égaux avec les trois axes de coordonnées.
3. Calculer la dérivée directionnelle de la fonction $f(x,y,z)=xy+yz+zx$ au point $P(2,1,3)$ dans la direction joignant ce point au point $Q(5,5,15)$.

Indications 4 –
Utiliser la formule :
$$D_vf(P)=\langle \operatorname{grad} f(P)\mid v\rangle$$
Pour le vecteur v, certains imposent qu'il soit unitaire (c'est-à-dire de norme 1) d'autres pas.

Correction 4 –
Lorsque f est différentiable alors la différentielle, la dérivée directionnelle, et le gradient encodent la même information et sont reliés par les formules :
$$D_vf(P)=\mathrm{d}f(P)(v)=\langle \operatorname{grad} f(P)\mid v\rangle.$$
Ici nos fonctions f sont de classes $\mathscr{C}^1$ (et même $\mathscr{C}^\infty$) en tant que sommes, produits, composées de fonctions de classe $\mathscr{C}^1$.
Il s'agit donc (a) de calculer les dérivées partielles de f et son gradient, (b) de les évaluer au point considéré, (c) d'appliquer la formule selon le vecteur de direction.

1. $f(x,y)=e^{x^2+y^2}$,
$$\operatorname{grad} f(x,y)=\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y),\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right)=\left(2xe^{x^2+y^2},2ye^{x^2+y^2}\right).$$
Au point $P(1,0)$:
$$\operatorname{grad} f(1,0)=\left(2\cdot 1\cdot e^{1^2+0^2},2\cdot 0\cdot e^{1^2+0^2}\right)=(2e,0).$$
La bissectrice du premier quadrant est dirigée par tout vecteur v non nul colinéaire au vecteur $(1,1)$. Si on choisit $v=(1,1)$ alors :
$$D_vf(P)=\langle \operatorname{grad} f(P)\mid v\rangle.=\left\langle\begin{pmatrix}2e\\0\end{pmatrix}\mid\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right\rangle=2e\cdot 1+0\cdot 1=2e.$$
Si on préfère faire les calculs avec le vecteur unitaire $v=\left(\frac{1}{\sqrt2},\frac{1}{\sqrt2}\right)$, alors on trouve le résultat précédent avec un facteur $\frac{1}{\sqrt2}$:
$$D_vf(P)=\frac{2e}{\sqrt2}=\sqrt2 e.$$

2. $f(x,y,z) = x^2 - 3yz + 5$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = 2x, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) = -3z, \quad \frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = -3y.$$

Ainsi, le gradient est :

$$\operatorname{grad} f(x,y,z) = \big(2x, -3z, -3y\big).$$

En $P = (1,2,1)$:

$$\operatorname{grad} f(1,2,1) = \big(2, -3, -6\big).$$

Un vecteur formant des angles égaux avec les trois axes de coordonnées est $(1,1,1)$, on choisit le vecteur unitaire correspondant $v = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)$ et alors :

$$D_v f(P) = \langle \operatorname{grad} f(P) \mid v \rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -6 \end{pmatrix} \mid \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = -\frac{7}{\sqrt{3}}.$$

3. $f(x,y,z) = xy + yz + zx$

$$\operatorname{grad} f(x,y,z) = (y+z, x+z, x+y) \qquad \operatorname{grad} f(2,1,3) = (4,5,3).$$

Le vecteur joignant P à Q est le vecteur $u = (3,4,12)$, sa norme est $\|u\| = \sqrt{3^2+4^2+12^2} = \sqrt{169} = 13$. Le vecteur unitaire associée est donc $v = \frac{u}{\|u\|} = \big(\frac{3}{13}, \frac{4}{13}, \frac{12}{13}\big)$.
Ainsi :

$$D_v f(P) = 4 \cdot \frac{3}{13} + 5 \cdot \frac{4}{13} + 3 \cdot \frac{12}{13} = \frac{68}{13}.$$

Exercice 5 – Équation aux dérivées partielles
Soit $f(x,y) = \exp\big(\frac{x^2+y^2}{xy}\big)$. Montrer que pour tout (x,y) dans le domaine de définition de f on a l'égalité :

$$x \cdot \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + y \cdot \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0.$$

Indications 5 –
Calculer d'abord les dérivées partielles.

Correction 5 –
Calculons d'abord $\frac{\partial f}{\partial x}$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \left(\frac{1}{y} - \frac{y}{x^2}\right) \exp\left(\frac{x^2+y^2}{xy}\right) = \left(\frac{1}{y} - \frac{y}{x^2}\right) f(x,y).$$

La fonction étant symétrique en x et y (c'est-à-dire $f(y,x) = f(x,y)$) alors on a :

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \left(\frac{1}{x} - \frac{x}{y^2}\right) f(x,y).$$

Ainsi :

$$x \cdot \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + y \cdot \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \left(\frac{x}{y} - \frac{y}{x}\right) f(x,y) + \left(\frac{y}{x} - \frac{x}{y}\right) f(x,y) = 0.$$

2 Différentielle et fonction $\mathscr{C}^1$

Exercice 6 – Différentielle
Calculer les différentielles des fonctions suivantes en un point arbitraire du domaine de définition :

1. $f(x,y) = \sin^2 x + \cos^2 y$
2. $f(x,y) = \ln\left(1 + \frac{x}{y}\right)$

Indications 6 –
Pour $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ différentiable en (x_0, y_0), la formule est :

$$\mathrm{d}f(x_0,y_0)(h,k) = h \cdot \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) + k \cdot \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0).$$

Correction 6 –
Lorsque $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ est différentiable alors sa différentielle se calcule par la formule :

$$\mathrm{d}f(x_0,y_0)(h,k) = h \cdot \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) + k \cdot \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0).$$

On rappelle que $\mathrm{d}f(x_0,y_0) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ est une fonction linéaire (c'est la fonction linéaire qui approche au mieux f autour de (x_0,y_0)).
Ici nos fonctions f sont différentiables sur leur domaine de définition car de classe $\mathscr{C}^1$ (et même $\mathscr{C}^\infty$) en tant que somme, produit, quotient, composée de fonctions de classe $\mathscr{C}^1$.
Il s'agit donc (a) de calculer les dérivées partielles de f, et (b) d'appliquer cette formule.

1. $f(x,y) = \sin^2 x + \cos^2 y$.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2\sin x \cdot \cos x = \sin(2x)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -2\cos y \cdot \sin y = -\sin(2y)$$

Ainsi :

$$\mathrm{d}f(x_0,y_0)(h,k) = h\sin(2x_0) - k\sin(2y_0).$$

Par exemple en $(x_0,y_0) = \left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{4}\right)$:

$$\mathrm{d}f\left(\tfrac{\pi}{3}, \tfrac{\pi}{4}\right)(h,k) = \tfrac{\sqrt{3}}{2}h - k.$$

2. $f(x,y) = \ln\left(1 + \frac{x}{y}\right)$.

$$\mathrm{d}f(x_0,y_0)(h,k) = h \cdot \frac{1}{x_0+y_0} - k \cdot \frac{x_0}{y_0(x_0+y_0)}.$$

Exercice 7 – Fonction $\mathscr{C}^1$
Soit la fonction $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$\begin{cases} f(x,y) = xy \cdot \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0), \\ f(0,0) = 0. \end{cases}$$

Étudier la continuité de f. Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^1$.

Indications 7 –
Il est évident que, en tout point (x,y) distinct de l'origine, la fonction f est continue et que les dérivées partielles existent et sont continues. Il suffit de montrer que f est continue en $(0,0)$ et que les dérivées partielles existent et sont continues.

Correction 7 – 1. En dehors de l'origine.

f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ en tant que sommes, produits, quotients de fonctions de classe $\mathscr{C}^1$.

En plus, en dehors de l'origine,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{f(x,y)}{x} + xy\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\right) = \frac{f(x,y)}{x} + \frac{4x^2y^3}{(x^2+y^2)^2}$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{f(x,y)}{y} + xy\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\right) = \frac{f(x,y)}{y} - \frac{4x^3y^2}{(x^2+y^2)^2}.$$

2. Continuité à l'origine.
   Puisque $\left|\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\right| \leqslant \frac{x^2+y^2}{x^2+y^2} = 1$ est borné,
   $$|f(x,y)| \leqslant |xy| \xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{} 0$$
   d'où f est continue en $(0,0)$.
3. Dérivées partielles à l'origine.
   Comme $\frac{f(0+h,0)-f(0,0)}{h} = 0$ alors $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0$ et de même $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$.
4. Continuité des dérivées partielles à l'origine.
   Puisque
   $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y^3}{(x^2+y^2)^2} = 0, \qquad \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3y^2}{(x^2+y^2)^2} = 0,$$
   il s'ensuit que
   $$\lim_{(u,v)\to(0,0)} \frac{\partial f}{\partial x}(u,v) = 0, \qquad \lim_{(u,v)\to(0,0)} \frac{\partial f}{\partial y}(u,v) = 0,$$
   d'où les dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ sont continues en $(0,0)$.
5. Conclusion.
   Les dérivées partielles existent et sont continues, ce qui est la définition de f est de classe $\mathscr{C}^1$.

Exercice 8 – Étude du caractère $\mathscr{C}^1$

Étudier la continuité, ainsi que l'existence et la continuité des dérivées partielles premières, des fonctions suivantes :

1. $$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x|y|}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$
2. $$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x\sin y - y\sin x}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Correction 8 –

De façon générale une somme, produit, quotient, composition de fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ est encore de classe $\mathscr{C}^1$ (c'est-à-dire les dérivées partielles existent et sont continues). Il s'agit donc d'étudier le caractère $\mathscr{C}^1$ juste aux points problématiques.

1. $$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x|y|}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$
   Il y a deux sortes de problèmes : d'une part l'origine car la fonction y est définie « à la main », mais d'autre part il y a une valeur absolue. La valeur absolue est une fonction continue partout, mais non dérivable à l'origine.

(a) Continuité en dehors de l'origine.

Sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ f est continue comme sommes, produits, quotients de fonctions continues.

(b) Continuité en $(0,0)$.

$$f(r\cos\theta, r\sin\theta) = \frac{r^2\cos\theta|\sin\theta|}{r} = r\cos\theta|\sin\theta|$$

Donc $|f(r\cos\theta, r\sin\theta)| \leqslant r \xrightarrow[r\to 0]{} f(0,0) = 0$ et donc f est continue à l'origine.

(c) Dérivées partielles en dehors de l'origine et de $(y=0)$.

En tout point (x_0, y_0) où $y_0 \neq 0$, f est de classe $\mathscr{C}^1$ car $y \mapsto |y|$ est dérivable en dehors de l'origine.

Pour $y \neq 0$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{|y|y^2}{(x^2+y^2)^{3/2}} \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{\operatorname{sgn}(y)x^3}{(x^2+y^2)^{3/2}}.$$

On a noté $\operatorname{sgn}(y) = \frac{y}{|y|}$ le signe $+1$ ou -1 d'un réel $y \neq 0$.

(d) Dérivées partielles aux points $(x_0, 0)$.

$$\frac{f(x_0+h,0)-f(x_0,0)}{h} = \frac{0-0}{h} = 0 \xrightarrow[h\to 0]{} 0 \quad \text{donc } \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,0) = 0.$$

Pour l'autre dérivée partielle, on calcule le taux d'accroissement :

$$\frac{f(x_0, 0+k)-f(x_0,0)}{k} = \frac{|k|}{k}\frac{x_0}{\sqrt{x_0^2+k^2}}$$

Si $x_0 = 0$, alors ce taux d'accroissement est nul et donc $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$. Mais si $x_0 \neq 0$, $\frac{|k|}{k}$ n'a pas de limite en 0, donc la dérivée partielle $\frac{\partial f}{\partial y}$ n'existe pas en $(x_0, 0)$ pour $x_0 \neq 0$.

Comme une des dérivées partielles n'existe pas en $(x_0, 0)$ pour $x_0 \neq 0$, f n'y est pas de classe $\mathscr{C}^1$.

(e) La fonction est-elle de classe $\mathscr{C}^1$ à l'origine ?

Si on évalue $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ le long du chemin $\gamma(t) = (0,t)$ on s'aperçoit que lorsque $t \to 0^+$ cette dérivée partielle tend vers 1 et donc pas vers $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0$. Ainsi la première dérivée partielle n'est pas continue à l'origine. Conclusion : f n'est pas $\mathscr{C}^1$ à l'origine.

On montrerait de même, si on en avait besoin, que $\frac{\partial f}{\partial y}$ n'est pas continue à l'origine.

2.

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x\sin y - y\sin x}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

f est $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Le seul point problématique est l'origine.

(a) Continuité en $(0,0)$.

On prouve la continuité à l'origine en utilisant que $\sin(x) = x + o(x^2)$ et $\sin(y) = y + o(y^2)$, donc

$$f(x,y) = \frac{xy + o(xy^2) - xy + o(x^2y)}{x^2+y^2} = \frac{o(xy^2)+o(x^2y)}{x^2+y^2} = \frac{o(x^2+y^2)}{x^2+y^2} \xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{} 0 = f(0,0)$$

Donc f est continue en $(0,0)$.

Quelques explications : on sait que $x \leqslant \sqrt{x^2+y^2}$ et $y \leqslant \sqrt{x^2+y^2}$, donc $o(x)$ et $o()y$ sont aussi des $o(r)$ avec $r = \sqrt{x^2+y^2}$. Ainsi $xy^2 \leqslant r^{3/2}$, donc $o(xy^2)$ est à fortiori un $o(x^2+y^2)$. De même $o(x^2y)$ est aussi un $o(x^2+y^2)$. Enfin par définition $\frac{o(u)}{u} \xrightarrow[u\to 0]{} 0$.

(b) Dérivées partielles en dehors de l'origine.
Pour $(x,y) \neq (0,0)$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{(y^2-x^2)\sin y - y(x^2+y^2)\cos x + 2xy\sin x}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{(y^2-x^2)\sin x + x(x^2+y^2)\cos y - 2xy\sin y}{(x^2+y^2)^2}.$$

(c) Dérivées partielles à l'origine.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0 \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$$

(d) La fonction est-elle de classe $\mathscr{C}^1$?
On procède comme pour la continuité :

$$\begin{aligned}
&(y^2-x^2)\sin y - y(x^2+y^2)\cos x + 2xy\sin x \\
&= (y^2-x^2)(y+o(y^2)) - y(x^2+y^2)(1+o(x)) + 2xy(x+o(x^2)) \\
&= (y^2-x^2)o(y^2) - y(x^2+y^2)o(x) + 2xyo(x^2) \\
&= o(r^4)
\end{aligned}$$

Où on a utilisé que $o(x)$ et $o()y$ sont aussi des $o(r)$ avec $r = \sqrt{x^2+y^2}$.
Ainsi $\frac{\partial f}{\partial x}$ tend vers $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ et donc cette dérivée partielle est continue à l'origine.
Il en est de même pour $\frac{\partial f}{\partial y}$. Conclusion : f est $\mathscr{C}^1$ à l'origine et donc sur $\mathbb{R}^2$.

3 Contre-exemples

Exercice 9 – Normes
Montrer que pour une norme N sur $\mathbb{R}^2$, les dérivées partielles n'existent pas en $(0,0)$.

Indications 9 –
Revenir à la définition de la dérivée partielle $\frac{\partial N}{\partial x}(0,0)$ à l'aide du taux d'accroissement.

Correction 9 –
Supposons un instant que N ait des dérivées partielles à l'origine, alors

$$\frac{\partial N}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0}\frac{N(h,0)-N(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{N(h,0)}{h}.$$

Voyons si cette limite existe vraiment. Par homogénéité, $N(h,0) = |h|\cdot N(1,0)$, donc :

$$\frac{N(h,0)}{h} = \frac{|h|}{h}N(1,0) = \begin{cases} +N(1,0) & \text{si } h>0, \\ -N(1,0) & \text{si } h<0. \end{cases}$$

Mais, par positivité de la norme, $N(1,0) \neq 0$, donc $\frac{N(h,0)}{h}$ ne peut pas avoir de limite lorsque $h \to 0$.
Ainsi la dérivée partielle de N par rapport à x en $(0,0)$ n'existe pas.

Exercice 10 – Dérivées partielles d'une fonction non continue
On définit la fonction

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Montrer que $\frac{\partial}{\partial x}f(x,y)$ et $\frac{\partial}{\partial y}f(x,y)$ existent en tout point de $\mathbb{R}^2$ bien que f ne soit pas continue en $(0,0)$.

Indications 10 –
Il faut calculer les dérivées partielles sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, les dérivées partielles en $(0,0)$ puis montrer que f n'est pas continue à l'origine.

Correction 10 –

1. Dérivées partielles en dehors de l'origine.
   Sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, f est différentiable car elle est de classe $\mathscr{C}^1$ en tant que somme, produit, quotient de fonctions de classe $\mathscr{C}^1$.
   On calcule donc les dérivées partielles en $(x,y) \neq (0,0)$:
   $$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{y^3 - x^2 y}{(x^2+y^2)^2}, \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{x^3 - xy^2}{(x^2+y^2)^2}.$$
2. Dérivées partielles à l'origine.
   Comme f est définie comme un cas particulier à l'origine, on calcule la dérivée partielle en $(0,0)$ en revenant à la définition, via un taux d'accroissement :
   $$\frac{f(0+h,0)-f(0,0)}{h} = \frac{h \cdot 0}{h^2+0^2} = 0 \xrightarrow[h\to 0]{} 0$$
   Donc $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0$. Par symétrie, on a $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$.
   Ainsi f admet des dérivées partielles en tout point de $\mathbb{R}^2$.
3. Non-continuité à l'origine.
   Sur le chemin $\gamma_1(t) = (t,0)$, $f(t,0) = \frac{0\cdot t}{t^2} = 0$, et sur $\gamma_2(t) = (t,t)$, $f(t,t) = \frac{t^2}{2t^2} = \frac{1}{2}$. Lorsque $t \to 0$ les deux limites sont différentes, donc f n'est pas continue en $(0,0)$.

Conclusion : on sait que pour une fonction d'une variable $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, si f est dérivable, alors f est continue. L'exemple de cet exercice prouve que ce n'est pas le cas pour les fonctions de deux variables $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ qui admet des dérivées partielles. Pour garantir la continuité il faudrait que f soit différentiable ou bien de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 11 – Dérivées partielles sans différentiabilité
Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,
$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y + xy^2}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$
Montrer que f est continue en $(0,0)$ et admet des dérivées partielles et même des dérivées directionnelles dans toutes les directions, mais n'y est pas différentiable.

Correction 11 –

1. f est continue à l'origine.
   On passe en coordonnées polaires :
   $$\left|f(r\cos\theta, r\sin\theta)\right| = \frac{r^3|\cos^2\theta\sin\theta + \cos\theta\sin^2\theta|}{r^2} \leqslant 2r \xrightarrow[r\to 0]{} 0.$$
   Donc la limite de f en $(0,0)$ vaut bien $f(0,0)$.
2. f admet des dérivées partielles.
   En dehors de l'origine f est différentiable (et même $\mathscr{C}^1$) donc y admet des dérivées partielles. Comme f est définie comme un cas particulier à l'origine, on calcule la dérivée partielle en $(0,0)$ via le taux d'accroissement :
   $$\frac{f(0+h,0)-f(0,0)}{h} = \frac{0}{h^2} \xrightarrow[h\to 0]{} 0, \qquad \text{donc} \quad \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0.$$
   De même, comme $f(y,x) = f(x,y)$, $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$.
   Donc les deux dérivées partielles existent.

3. f admet des dérivées directionnelles.
   Si on note $v = (h,k)$ un vecteur unitaire, alors $h^2 + k^2 = 1$, et
$$\frac{f(0+th, 0+tk) - f(0,0)}{t} = \frac{t^3h^2k + t^3hk^2}{t^3(h^2+k^2)} = h^2k + hk^2.$$
   Ainsi
$$D_v f(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(0+th,0+tk) - f(0,0)}{t} = h^2k + hk^2.$$
   On retrouve bien sûr comme cas particuliers avec $(h,k) = (1,0)$ et $(h,k) = (0,1)$ que les deux dérivées partielles sont nulles à l'origine.
4. f n'est pas différentiable.
   Supposons par l'absurde que f soit différentiable, alors la différentielle en $(0,0)$ s'exprime avec les dérivées partielles :
$$\mathrm{d}f(0,0)(h,k) = h \cdot \frac{\partial}{\partial x} f(0,0) + k \cdot \frac{\partial}{\partial y} f(0,0) = h \cdot 0 + k \cdot 0 = 0$$
   Nous avons donc le candidat à être la différentielle, c'est la fonction nulle $(h,k) \mapsto \ell(h,k) = 0$, mais est-ce qu'elle convient ? En effet pour être différentiable en $(0,0)$, f doit vérifier :
$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(0+h,0+k) - f(0,0) - \ell(h,k)}{\|(h,k)\|} = 0.$$
   Notons $g(h,k)$ ce quotient :
$$g(h,k) = \frac{f(0+h,0+k) - f(0,0) - \ell(h,k)}{\|(h,k)\|} = \frac{\frac{h^2k+hk^2}{h^2+k^2} - 0 - 0}{\sqrt{h^2+k^2}} = \frac{h^2k + hk^2}{(h^2+k^2)^{\frac{3}{2}}}$$
   Le long de $\gamma_1(t) = (t,t)$, $g(t,t) = \frac{2t^3}{(2t^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Donc g ne tend vers 0 à l'origine. Conclusion : f n'est pas différentiable à l'origine.
   Une autre méthode : par l'absurde si f était différentiable alors pour n'importe quel vecteur $v = (h,k)$, on aurait
$$D_v f(0,0) = h \cdot \frac{\partial}{\partial x} f(0,0) + k \cdot \frac{\partial}{\partial y} f(0,0)$$
   Et donc ici on aurait $D_v f(0,0) = 0$. Prenons $v = (h,k) = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1)$, on a vu à la question précédente que $D_v f(0,0) = h^2k + hk^2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \neq 0$ ce qui fournit la contradiction.

Corrections : Arnaud Bodin. Relecture : Axel Renard.

MATRICE JACOBIENNE

1 Matrice jacobienne et composition

Exercice 1 – Dérivées d'une composition
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable. Calculer les dérivées partielles de :

$$g(x,y) = f(x+y), \qquad h(x,y) = f(x^2+y^2), \qquad k(x,y) = f(xy).$$

Indications 1 –
Pour calculer les dérivées partielles par rapport à une variable, interpréter les autres variables comme paramètres et utiliser les règles ordinaires de calcul de la dérivée.

Correction 1 –

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x,y) = f'(x+y) \qquad \frac{\partial g}{\partial y}(x,y) = f'(x+y)$$
$$\frac{\partial h}{\partial x}(x,y) = 2xf'(x^2+y^2) \qquad \frac{\partial h}{\partial y}(x,y) = 2yf'(x^2+y^2)$$
$$\frac{\partial k}{\partial x}(x,y) = yf'(xy) \qquad \frac{\partial k}{\partial y}(x,y) = xf'(xy)$$

Exercice 2 – Équation aux dérivées partielles
Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ et soit $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par :

$$g(x,y,z) = f(x-y, y-z, z-x).$$

Montrer que :

$$\frac{\partial g}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\partial g}{\partial z} = 0.$$

Indications 2 –
Écrire g sous la forme $f \circ \Phi$ et appliquer la formule « $J_g = J_f \times J_\Phi$ ».

Correction 2 –
On a $g = f \circ \Phi$ où $\Phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ est définie par $\Phi(x,y,z) = (x-y, y-z, z-x)$. On souhaite appliquer la formule de la matrice jacobienne d'une composition « $J_g = J_f \times J_\Phi$ ». Plus précisément :

$$J_g(x,y,z) = J_f\big(\Phi(x,y,z)\big) \times J_\Phi(x,y,z).$$

Or les matrices jacobiennes de f et g sont des matrices-lignes :

$$J_f(x,y,z) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) & \frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) & \frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) \end{pmatrix}$$

et

$$J_g(x,y,z) = \begin{pmatrix} \frac{\partial g}{\partial x}(x,y,z) & \frac{\partial g}{\partial y}(x,y,z) & \frac{\partial g}{\partial z}(x,y,z) \end{pmatrix}.$$

La matrice jacobienne de Φ est ici une matrice ayant des coefficients indépendants de x, y, z :

$$J_\Phi(x,y,z) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

La formule « $J_g = J_f \times J_\Phi$ » permet donc d'exprimer les dérivées partielles de g en fonction de celles de f. Par exemple on trouve :

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x,y,z) = \frac{\partial f}{\partial x}\big(\Phi(x,y,z)\big) - \frac{\partial f}{\partial z}\big(\Phi(x,y,z)\big).$$

On résume les résultats en :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial g}{\partial x} &= \frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial z}\\
\frac{\partial g}{\partial y} &= \frac{\partial f}{\partial y} - \frac{\partial f}{\partial x}\\
\frac{\partial g}{\partial z} &= \frac{\partial f}{\partial z} - \frac{\partial f}{\partial y}
\end{aligned}$$

En faisant la somme, on obtient l'égalité cherchée.

Exercice 3 – Matrices jacobiennes et composition
On considère les fonctions $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ et $g : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ définies par :

$$f(x,y) = \big(\sin(x+y), xy, \exp(y^2)\big), \quad g(u,v,w) = uvw.$$

1. Calculer explicitement $g \circ f$.
2. En utilisant l'expression trouvée à la première question, calculer les dérivées partielles de $g \circ f$.
3. Déterminer les matrices jacobiennes $J_f(x,y)$ et $J_g(u,v,w)$ de f et de g.
4. Retrouver les dérivées partielles de g en utilisant cette fois un produit approprié de matrices jacobiennes.

Indications 3 –
Les variables x,y,z et u,v,w sont liées par la relation suivante : $f(x,y) = (\sin(x+y), xy, \exp(y^2)) = (u,v,w)$.

Correction 3 – 1. $g(f(x,y)) = xy \cdot \sin(x+y) \cdot \exp(y^2)$

2.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial (g\circ f)}{\partial x}(x,y) &= \big(\sin(x+y) + x\cos(x+y)\big)\cdot y \cdot e^{y^2}\\
\frac{\partial (g\circ f)}{\partial y}(x,y) &= \big((2y^2+1)\sin(x+y) + y\cos(x+y)\big)\cdot x \cdot e^{y^2}
\end{aligned}$$

3. On note u,v,w les trois composantes de f, c'est-à-dire : $f(x,y) = (\sin(x+y), xy, \exp(y^2)) = (u,v,w)$. Il faut considérer u,v,w à la fois comme des fonctions (par exemple $(x,y) \mapsto u(x,y) = \sin(x+y)$) mais aussi comme le nom de nouvelles variables.
   Ainsi la matrice jacobienne J_f de f est une matrice 3×2 et s'écrit :

$$J_f(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y}\\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y}\\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\cos(x+y) & \cos(x+y)\\ y & x\\ 0 & 2ye^{y^2}\end{pmatrix}.$$

   De même, la matrice jacobienne J_g de g est une matrice-ligne :

$$J_g(u,v,w) = \begin{pmatrix}\frac{\partial g}{\partial u} & \frac{\partial g}{\partial v} & \frac{\partial g}{\partial w}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} vw & uw & uv\end{pmatrix}.$$

   On aura besoin de cette matrice exprimée à l'aide des variables x,y,z, c'est-à-dire où l'on a substitué u,v,w par leur expression en x et y :

$$J_g\big(f(x,y)\big) = \begin{pmatrix} xy\exp(y^2) & \sin(x+y)\exp(y^2) & \sin(x+y)xy\end{pmatrix}.$$

4. La matrice jacobienne $J_{g\circ f}$ de la fonction composée $g\circ f$ s'écrit comme produit matriciel : « $J_{g\circ f} = J_g \times J_f$ ». Plus précisément cette formule est $J_{g\circ f}(x,y) = J_g(f(x,y)) \times J_f(x,y)$. En gardant la notation simplifiée on a :

$$J_{g\circ f} = J_g \times J_f = \begin{pmatrix} \frac{\partial g}{\partial u} & \frac{\partial g}{\partial v} & \frac{\partial g}{\partial w} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} \end{pmatrix}.$$

Le résultat est une matrice-ligne de longueur 2 qui est :

$$J_{g\circ f} = \begin{pmatrix} \frac{\partial(g\circ f)}{\partial x} & \frac{\partial(g\circ f)}{\partial y} \end{pmatrix}.$$

En calculant le produit de matrice et en identifiant les coefficients de $J_{g\circ f}$ avec ceux de $J_g \times J_f$, on retrouve :

$$\frac{\partial(g\circ f)}{\partial x}(x,y) = \big(\sin(x+y) + x\cos(x+y)\big) \cdot y \cdot e^{y^2}$$
$$\frac{\partial(g\circ f)}{\partial y}(x,y) = \big((2y^2+1)\sin(x+y) + y\cos(x+y)\big) \cdot x \cdot e^{y^2}$$

Exercice 4 – Coordonnées polaires

Soit $\Phi :]0,+\infty[\times [0,2\pi[\to \mathbb{R}^2$ le changement de coordonnées polaires défini par :

$$(r,\theta) \longmapsto (x,y) = (r\cos\theta, r\sin\theta).$$

1. Calculer la matrice jacobienne de Φ.
2. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x,y) \mapsto f(x,y)$. On note $g = f\circ\Phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(r,\theta) \mapsto f(r\cos\theta, r\sin\theta)$. Calculer les dérivées partielles de g (par rapport à r et θ) en fonction des dérivées partielles de f (par rapport à x et y).
3. On considère une solution f de l'équation aux dérivées partielles :

$$y\frac{\partial f}{\partial x} - x\frac{\partial f}{\partial y} = 0.$$

Quelle équation satisfait alors $g = f\circ\Phi$? Résoudre cette équation et l'équation initiale.

Correction 4 –

1. Les deux composantes de Φ sont $x = r\cos\theta$ et $y = r\sin\theta$. Ainsi :

$$J_\Phi(r,\theta) = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix}.$$

2. Comme $g = f\circ\Phi$, on applique la formule « $J_g = J_f \times J_\Phi$ » où :

$$J_g = \begin{pmatrix} \frac{\partial g}{\partial r} & \frac{\partial g}{\partial \theta} \end{pmatrix} \qquad J_f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix}.$$

Par la formule « $J_g = J_f \times J_\Phi$ » on obtient :

$$\frac{\partial g}{\partial r} = \cos\theta\frac{\partial f}{\partial x} + \sin\theta\frac{\partial f}{\partial y},$$
$$\frac{\partial g}{\partial \theta} = -r\sin\theta\frac{\partial f}{\partial x} + r\cos\theta\frac{\partial f}{\partial y}.$$

Il est plus rigoureux de préciser en quelles valeurs les fonctions doivent être évaluées, par exemple :

$$\frac{\partial g}{\partial r}(r,\theta) = \cos\theta\frac{\partial f}{\partial x}(r\cos\theta, r\sin\theta) + \sin\theta\frac{\partial f}{\partial y}(r\cos\theta, r\sin\theta).$$

3. Supposons que $f(x,y)$ vérifie l'équation aux dérivées partielles $y\frac{\partial f}{\partial x} - x\frac{\partial f}{\partial y} = 0$.
Par la question précédente, et toujours en notant $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$, on remarque que :
$$\frac{\partial g}{\partial \theta} = -r\sin\theta\frac{\partial f}{\partial x} + r\cos\theta\frac{\partial f}{\partial y} = -y\frac{\partial f}{\partial x} + x\frac{\partial f}{\partial y}.$$
Donc si $f(x,y)$ satisfait l'équation aux dérivées partielles précédente, alors $g(r,\theta)$ satisfait une équation très simple :
$$\frac{\partial g}{\partial \theta} = 0.$$
Il est facile de trouver les fonctions g satisfaisant cette équation. Puisque la dérivée partielle de g par rapport à θ est nulle cela signifie que g ne dépend pas de la variable θ, autrement dit elle ne dépend que de la variable r. Ainsi il existe une fonction $k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, telle que :
$$g(r,\theta) = k(r).$$
Comme $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ alors $r = \sqrt{x^2+y^2}$, donc
$$g(r,\theta) = f(r\cos\theta, r\sin\theta) = k(r)$$
et devient :
$$f(x,y) = k\big(\sqrt{x^2+y^2}\big).$$
Quitte à changer k, on pourrait aussi écrire $f(x,y) = k(x^2+y^2)$.
Géométriquement cela signifie que la valeur de f en (x,y) ne dépend que la distance r entre (x,y) et l'origine et pas de l'angle θ de ce point avec l'horizontale. En particulier le graphe de f, est symétrique par rotation autour de l'axe (Oz).

Exercice 5 – Fonctions homogènes
Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction $\mathscr{C}^1$ telle que :
$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad \forall t > 0 \qquad f(tx,ty) = tf(x,y). \tag{H}$$
Montrer que f est linéaire.
Indication. Commencer par dériver la formule d'homogénéité (H) par rapport à t.

Indications 5 –
Utiliser que
$$\frac{d}{dt}f\big(x(t),y(t)\big) = x'(t)\frac{\partial f}{\partial x}\big(x(t),y(t)\big) + y'(t)\frac{\partial f}{\partial y}\big(x(t),y(t)\big).$$

Correction 5 –
On rappelle la formule :
$$\frac{d}{dt}f\big(x(t),y(t)\big) = x'(t)\frac{\partial f}{\partial x}\big(x(t),y(t)\big) + y'(t)\frac{\partial f}{\partial y}\big(x(t),y(t)\big).$$
que l'on peut abréger en :
$$\frac{d}{dt}f\big(x(t),y(t)\big) = x'(t)\frac{\partial f}{\partial x} + y'(t)\frac{\partial f}{\partial y}.$$
Fixons (x_0,y_0) et $x(t) = tx_0$, $y(t) = ty_0$. On note $g(t) = f(tx_0,ty_0)$, $t \in]0,+\infty[$. Alors d'une part g est une fonction linéaire (pour sa variable t) car :
$$g(t) = f(tx_0,ty_0) = tf(x_0,y_0).$$
Donc sa dérivée est :
$$g'(t) = f(x_0,y_0).$$

D'autre part $x'(t) = x_0$, $y'(t) = y_0$ donc par la formule de la dérivée d'une composition que l'on a rappelée ci-dessus, on a :

$$g'(t) = \frac{d}{dt} f\big(x(t), y(t)\big) = x_0 \cdot \frac{\partial f}{\partial x}(tx_0, ty_0) + y_0 \cdot \frac{\partial f}{\partial y}(tx_0, ty_0).$$

Ainsi, quel que soit $t > 0$:

$$f(x_0, y_0) = x_0 \cdot \frac{\partial f}{\partial x}(tx_0, ty_0) + y_0 \cdot \frac{\partial f}{\partial y}(tx_0, ty_0).$$

La fonction f étant de classe $\mathscr{C}^1$, les dérivées partielles sont continues à l'origine. En particulier lorsque $t \to 0$, on trouve :

$$f(x_0, y_0) = x_0 \cdot \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) + y_0 \cdot \frac{\partial f}{\partial y}(0,0).$$

Bilan : si on note $a = \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ et $b = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$, alors :

$$f(x_0, y_0) = ax_0 + by_0$$

où $a, b \in \mathbb{R}$ sont des constantes (indépendantes de (x_0, y_0)). La formule étant valable quel que soit (x_0, y_0), f est bien une fonction linéaire :

$$f(x, y) = ax + by$$

quel que soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

2 Gradient, divergence, rotationnel

Exercice 6 – Gradient, divergence, rotationnel

∇ (qui se lit « nabla ») correspond à l'opérateur $\nabla = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial}{\partial x_n} \end{pmatrix}$.

Le *gradient* de $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est :

$$\operatorname{grad} f(x) = \nabla f(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(x) \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n}(x) \end{pmatrix}.$$

La *divergence* de $F = (f_1, \dots, f_n) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ se calcule à l'aide du produit scalaire « $\cdot$ » :

$$\operatorname{div} F(x) = \nabla \cdot F(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial x_i}(x).$$

Le *rotationnel* de $F = (f_1, f_2, f_3) : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ se calcule à l'aide du produit vectoriel « $\wedge$ » :

$$\operatorname{rot} F(x,y,z) = \nabla \wedge F(x,y,z) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_3}{\partial y}(x,y,z) - \frac{\partial f_2}{\partial z}(x,y,z) \\ \frac{\partial f_1}{\partial z}(x,y,z) - \frac{\partial f_3}{\partial x}(x,y,z) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x}(x,y,z) - \frac{\partial f_1}{\partial y}(x,y,z) \end{pmatrix}.$$

1. Calculer le gradient de $f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2$.
2. Calculer la divergence et le rotationnel de $F(x,y,z) = (x^2 z, y^2 + xz, x^2 y^2 - z)$. Même question avec $F(x,y,z) = (x \cos y, y \cos z, z \cos x)$.
3. Calculer le rotationnel de $F(x,y,z) = (2xy + z^3, x^2 - 2yz, 4z - y^2 + 3xz^2)$. Trouver $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ tel que $\operatorname{grad} f(x,y,z) = F(x,y,z)$. On dit que F dérive d'un potentiel scalaire.

4. Soit $G(x,y,z) = (xyz, x^2+y^2+z^2, x+y+z)$. Soit $F = \operatorname{rot}(G)$ (on dit que F dérive d'un potentiel vectoriel). Calculer $\operatorname{div} F$.
5. Soit $E : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ le champ newtonien défini par : $E(M) = k\frac{\overrightarrow{OM}}{\|\overrightarrow{OM}\|^3}$, où k est une constante, $O = (0,0,0)$ l'origine et $M(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. Déterminer l'expression de E via les coordonnées (x,y,z) de M. Calculer la divergence et le rotationnel de E.

Indications 6 –
Pour la dernière question, divergence et rotationnel sont nuls.

Correction 6 – 1. $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x) = 2x_i$, donc

$$\operatorname{grad} f(x) = \nabla f(x) = 2\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = 2x.$$

2. (a) $F(x,y,z) = (f_1,f_2,f_3) = (x^2z, y^2+xz, x^2y^2-z)$.

$$\operatorname{div} F(x) = \nabla \cdot F(x) = \frac{\partial f_1}{\partial x}(x,y,z) + \frac{\partial f_2}{\partial y}(x,y,z) + \frac{\partial f_3}{\partial z}(x,y,z) = 2xz + 2y - 1.$$

$$\operatorname{rot} F(x,y,z) = \nabla \wedge F(x,y,z) = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_3}{\partial y} - \frac{\partial f_2}{\partial z} \\ \frac{\partial f_1}{\partial z} - \frac{\partial f_3}{\partial x} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x^2y - x \\ x^2 - 2xy^2 \\ z \end{pmatrix}.$$

(b) $F(x,y,z) = (x\cos y, y\cos z, z\cos x)$.

$$\operatorname{div} F(x) = \cos y + \cos z + \cos x.$$

$$\operatorname{rot} F(x,y,z) = \begin{pmatrix} y\sin z \\ z\sin x \\ x\sin y \end{pmatrix}.$$

3. $F(x,y,z) = (2xy + z^3, x^2 - 2yz, 4z - y^2 + 3xz^2)$.

$$\operatorname{rot} F(x,y,z) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Il existe un théorème qui dit que lorsque le rotationnel est nul, alors F dérive d'un potentiel scalaire, c'est-à-dire que l'on peut trouver $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ telle que $F = \operatorname{grad} f$.
Cherchons donc un f qui doit vérifier ici :

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2xy + z^3 \\ x^2 - 2yz \\ 4z - y^2 + 3xz^2 \end{pmatrix}.$$

Partons par exemple de l'équation $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = 2xy + z^3$. On l'intègre par rapport à la variable x :

$$f(x,y,z) = x^2y + xz^3 + C$$

où C est une constante pour la variable x, mais attention ! elle peut dépendre des variables y et z. Donc C est en fait une fonction $C(y,z)$.

On sait donc que $f(x,y,z) = x^2y + xz^3 + C(y,z)$, donc

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) = x^2 + \frac{\partial C}{\partial y}(y,z).$$

Mais d'autre part on doit avoir :

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) = x^2 - 2yz.$$

Donc :

$$x^2 + \frac{\partial C}{\partial y}(y,z) = x^2 - 2yz,$$

ce qui conduit à :

$$\frac{\partial C}{\partial y}(y,z) = -2yz.$$

On intègre cette fois par rapport à la variable y pour trouver :

$$C(y,z) = -y^2z + D(z),$$

et donc

$$f(x,y,z) = x^2y + xz^3 - y^2z + D(z),$$

où $D(z)$ est une fonction à déterminer.
En dérivant cette expression par rapport à z et en identifiant avec la troisième composante du gradient, on doit avoir :

$$3xz^2 - y^2 + \frac{\partial D}{\partial z}(z) = 4z - y^2 + 3xz^2.$$

Donc $D'(z) = \frac{\partial D}{\partial z}(z) = 4z$. Donc $D(z) = 2z^2 + E$, où $E \in \mathbb{R}$ est une vraie constante. On peut choisir $E = 0$.
Bilan : $f(x,y,z) = x^2y + xz^3 - y^2z + 2z^2$.

4. $G(x,y,z) = (xyz, x^2 + y^2 + z^2, x + y + z)$.

$$F(x,y,z) = \mathrm{rot}(G) = \begin{pmatrix} 1-2z \\ -1+xy \\ 2x - xz \end{pmatrix}.$$

On calcule alors :

$$\mathrm{div}\, F = 0.$$

Remarque. Lorsque $F = \mathrm{rot}(G)$, on dit que F dérive d'un potentiel vectoriel et alors il existe un théorème affirmant que l'on a toujours $\mathrm{div}(\mathrm{rot}(G)) = 0$.

5. (a) Calcul de E.

$$\overrightarrow{OM} = (x,y,z) \qquad \|\overrightarrow{OM}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Ainsi, le champ E s'écrit :

$$E(M) = k\frac{\overrightarrow{OM}}{\|\overrightarrow{OM}\|^3} = k\frac{(x,y,z)}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}$$

C'est-à-dire

$$E(x,y,z) = \left(\frac{kx}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}, \frac{ky}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}, \frac{kz}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\right).$$

(b) Divergence.

Notons $E=(f_1,f_2,f_3)$. Alors avec $f_1(x,y,z)=\frac{kx}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}$, on a :

$$\frac{\partial f_1}{\partial x}=\frac{k}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}-\frac{3kx^2}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}}.$$

De façon similaire par symétrie, on obtient :

$$\frac{\partial f_2}{\partial y}=\frac{k}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}-\frac{3ky^2}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}},$$

$$\frac{\partial f_3}{\partial z}=\frac{k}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}-\frac{3kz^2}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}}.$$

Pour calculer la divergence on fait la somme de ces trois dérivées :

$$\begin{aligned}\operatorname{div}E&=\frac{\partial f_1}{\partial x}+\frac{\partial f_2}{\partial y}+\frac{\partial f_3}{\partial z}\\&=\frac{3k}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}-\frac{3k(x^2+y^2+z^2)}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}}\\&=\frac{3k}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}-\frac{3k}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\\&=0\end{aligned}$$

Bilan : la divergence est nulle.

(c) Rotationnel.

$$\operatorname{rot}E(x,y,z)=\begin{pmatrix}\frac{\partial}{\partial x}\\\frac{\partial}{\partial y}\\\frac{\partial}{\partial z}\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}f_1\\f_2\\f_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{\partial f_3}{\partial y}-\frac{\partial f_2}{\partial z}\\\frac{\partial f_1}{\partial z}-\frac{\partial f_3}{\partial x}\\\frac{\partial f_2}{\partial x}-\frac{\partial f_1}{\partial y}\end{pmatrix}$$

Calculons $\frac{\partial f_3}{\partial y}$ où $f_3=\frac{kz}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}$:

$$\frac{\partial f_3}{\partial y}=-\frac{3kyz}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}}.$$

Calculons $\frac{\partial f_2}{\partial z}$ où $f_2=\frac{ky}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}$:

$$\frac{\partial f_2}{\partial z}=-\frac{3kyz}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}}.$$

Ainsi la première composante du rotationnel est nulle :

$$\frac{\partial f_3}{\partial y}-\frac{\partial f_2}{\partial z}=0.$$

Par symétrie on trouve aussi zéro pour les autres composantes.
Conclusion : le rotationnel est le vecteur nul.

Corrections : Arnaud Bodin. Relecture : Axel Renard.

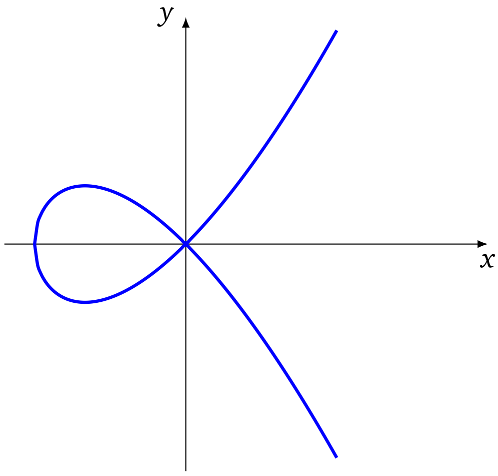
GRADIENT – THÉORÈME DES ACCROISSEMENTS FINIS

1 Tangentes et plans tangents

Exercice 1 – Tangentes

Soit $\mathscr{C}$ la courbe définie par l'équation :

$$y^2 - x^2(x+1) = 0.$$



1. Déterminer les points où les dérivées partielles de $f(x,y) = y^2 - x^2(x+1)$ s'annulent simultanément. Est-ce que ces points appartiennent à $\mathscr{C}$? Ces points seront exclus dans la suite de l'exercice.
2. Calculer l'équation de la tangente en un point de $\mathscr{C}$.
3. Pour quels points la tangente est-elle horizontale ? Verticale ?

Correction 1 – 1.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = -3x^2 - 2x \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2y.$$

Si en (x,y) les deux dérivées partielles s'annulent, alors d'une part $2y = 0$ donc $y = 0$ et d'autre part $-3x^2 - 2x = -x(3x+2) = 0$ donc $x = 0$ ou $x = -\frac{2}{3}$.
Ainsi f admet deux points critiques $(0,0)$ et $(-\frac{2}{3},0)$.
On a $f(0,0) = 0$ donc $(0,0) \in \mathscr{C}$, par contre $f(-\frac{2}{3},0) \neq 0$ donc $(-\frac{2}{3},0) \notin \mathscr{C}$.

2. On fixe $(x_0,y_0) \in \mathscr{C} \setminus \{(0,0)\}$. L'équation de la tangente en ce point est :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0) = 0.$$

Pour notre fonction f cela donne :

$$(-3x_0^2 - 2x_0)(x-x_0) + 2y_0(y-y_0) = 0,$$

ou encore :

$$(-3x_0^2 - 2x_0)x + 2y_0 y + 3x_0^3 + 2x_0^2 - 2y_0^2 = 0.$$

On peut encore simplifier un peu le terme constant en utilisant la relation $f(x_0,y_0) = 0$:

$$-x_0(3x_0+2)x + 2y_0 y + x_0^3 = 0.$$

3. Rappelons que l'équation de la tangente en (x_0,y_0) est :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0) = 0.$$

Une droite horizontale a une équation du type $y = \text{cst}$, donc la tangente est horizontale si et seulement si $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = 0$. Or

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0 \iff -3x^2 - 2x = 0 \iff x = 0 \text{ ou } x = -\frac{2}{3}.$$

Si $x_0 = 0$ alors, comme $f(x_0, y_0) = 0$, on obtient $y_0 = 0$, or le point $(0,0)$ est exclu de l'étude (la tangente n'y est pas bien définie). Si $x_0 = -\frac{2}{3}$, alors $f(x_0, y_0) = 0$ implique $y_0^2 - \frac{4}{27} = 0$, donc $y_0 = \pm\frac{2}{3\sqrt{3}}$. Bilan : il y a deux points où la tangente est horizontale : $(-\frac{2}{3}, -\frac{2}{3\sqrt{3}})$, $(-\frac{2}{3}, +\frac{2}{3\sqrt{3}})$.

Une droite verticale a une équation du type $x = \text{cst}$, donc la tangente est verticale si et seulement si $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0$. Or $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0$ si et seulement si $y = 0$. Si $y_0 = 0$ alors la relation $f(x_0, y_0) = 0$ implique $x_0 = 0$ ou $x_0 = -1$. On a exclu $(0,0)$, donc la tangente est verticale à $\mathscr{C}$ uniquement au point $(-1, 0)$.

Exercice 2 – Plans tangents

1. Trouver l'équation du plan tangent à la surface d'équation $z = \sin(\pi x y)\exp(2x^2 y - 1)$ au point $(1, \frac{1}{2}, 1)$.
2. Trouver l'équation du plan tangent à la surface d'équation $z = \sqrt{19 - x^2 - y^2}$ au point $(1, 3, 3)$.
3. Trouver les points sur le paraboloïde d'équation $z = 4x^2 + y^2$ où le plan tangent est parallèle au plan d'équation $x + 2y + z = 6$.

Indications 2 –
Le plan tangent à la surface d'équation $z = f(x,y)$ au point $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ est donné par l'équation :

$$z = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0).$$

Correction 2 –
On répond à la dernière question.
Le plan tangent à la surface d'équation $z = f(x,y)$ au point $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ est donné par l'équation :

$$z = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0).$$

Ainsi, le plan tangent à la surface d'équation $z = 4x^2 + y^2$ au point (x_0, y_0, z_0) a pour équation :

$$\begin{aligned} & z = (4x_0^2 + y_0^2) + 8x_0(x - x_0) + 2y_0(y - y_0) \\ \iff & z = 8x_0 x + 2y_0 y - (4x_0^2 + y_0^2). \end{aligned}$$

Donc l'équation est :

$$8x_0 x + 2y_0 y - z = 4x_0^2 + y_0^2.$$

Pour que ce plan soit parallèle au plan d'équation $x + 2y + z = 6$, il faut et il suffit que leurs vecteurs normaux $(8x_0, 2y_0, -1)$ et $(1, 2, 1)$ soient colinéaires. Le facteur de colinéarité est $\lambda = -1$, donc $x_0 = -\frac{1}{8}$ et $y_0 = -1$. Par conséquent, le point recherché sur le paraboloïde est le point $(-\frac{1}{8}, -1, \frac{17}{16})$.

Exercice 3 – Y'a comme un problème
On demande à un étudiant de trouver l'équation du plan tangent à la surface d'équation $z = x^4 - y^2$ au point $(2, 3, 7)$. Sa réponse est

$$z = 4x^3(x - 2) - 2y(y - 3).$$

1. Expliquer, sans calcul, pourquoi cela ne peut en aucun cas être la bonne réponse.
2. Quelle est l'erreur commise par l'étudiant ?
3. Donner la réponse correcte.

Indications 3 –
Ne pas confondre les variables pour l'équation de la surface, les variables pour l'équation de la tangente en un point, et les coordonnées du point de contact.

Correction 3 –

1. L'équation d'un plan tangent doit être une équation linéaire en x, y et z !
   En plus le point $(2,3,7)$ ne vérifie pas l'équation proposée.
2. Il a confondu les coordonnées du point de contact et les variables de l'équation du plan.
3. L'équation du plan tangent à la surface $f(x,y,z)=k$ en (x_0,y_0,z_0) est :
$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0,z_0)(x-x_0)+\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0,z_0)(y-y_0)+\frac{\partial f}{\partial z}(x_0,y_0,z_0)(z-z_0)=0.$$
   Ici $f(x,y,z)=x^4-y^2-z$, on vérifie d'abord que $f(2,3,7)=0$. Ensuite le plan tangent en $(2,3,7)$ a pour équation :
$$\begin{aligned}
&\frac{\partial f}{\partial x}(2,3,7)(x-2)+\frac{\partial f}{\partial y}(2,3,7)(y-3)+\frac{\partial f}{\partial z}(2,3,7)(z-7)=0\\
\iff\ & 32(x-2)-6(y-3)-z+7=0\\
\iff\ & z=32x-6y-39
\end{aligned}$$
   On aurait aussi pu considérer que la surface est le graphe de la fonction de deux variable $g(x,y)=x^4-y^2$ et appliquer la formule adaptée :
$$z=g(x_0,y_0)+\frac{\partial g}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0)+\frac{\partial g}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0).$$

Exercice 4 – Cône
Soit $\mathscr{C}$ le cône d'équation $z^2=x^2+y^2$. On note $\mathscr{P}_{M_0}$ le plan tangent au cône $\mathscr{C}$ en $M_0\in\mathscr{C}\setminus\{(0,0,0)\}$.

1. Déterminer un vecteur normal et l'équation du plan tangent $\mathscr{P}_{M_0}$ en un point $M_0(x_0,y_0,z_0)$ du cône autre que l'origine.
2. Déterminer les autres points du cône ayant le même plan tangent que $\mathscr{P}_{M_0}$.

Indications 4 –
Un vecteur normal de la surface d'équation $f(x,y,z)=0$ au point (x_0,y_0,z_0) est le vecteur gradient en ce point.

Correction 4 –
Un vecteur normal de la surface d'équation $f(x,y,z)=0$ au point (x_0,y_0,z_0) est le vecteur gradient :
$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0,z_0),\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0,z_0),\frac{\partial f}{\partial z}(x_0,y_0,z_0)\right).$$

1. Un vecteur normal du cône $\mathscr{C}$ au point (x_0,y_0,z_0) de $\mathscr{C}\setminus\{(0,0,0)\}$ est le vecteur $(x_0,y_0,-z_0)$ et le plan tangent au cône $\mathscr{C}$ en ce point est donné par l'équation :
$$x_0(x-x_0)+y_0(y-y_0)-z_0(z-z_0)=0,$$
   c'est-à-dire :
$$x_0x+y_0y-z_0z=x_0^2+y_0^2-z_0^2=0\quad\text{car } M_0\in\mathscr{C}.$$
2. Pour que $M_0'=(x_0',y_0',z_0')\in\mathscr{C}\setminus\{(0,0,0)\}$ vérifie $\mathscr{P}_{M_0'}=\mathscr{P}_{M_0}$, il faut et il suffit que les vecteurs $(x_0,y_0,-z_0)$ et $(x_0',y_0',-z_0')$ soient colinéaires, donc que (x_0,y_0,z_0) et (x_0',y_0',z_0') soient colinéaires. On en conclut que l'ensemble des points du cône ayant le même plan tangent que $\mathscr{P}_{M_0}$ est constitué de la droite (OM_0) privée du point O.

2 Approximations – Théorème des accroissements finis

Exercice 5 – Approximations
Utiliser une approximation affine bien choisie pour calculer une valeur approchée des nombres suivants :

$$\exp[\sin(3.16)\cos(0.02)], \qquad \arctan[\sqrt{4.03}-2\exp(0.01)], \qquad \exp[-0.02\sqrt{4.03}].$$

Indications 5 –
On prend

$$f(x,y)=\exp[\sin(\pi+x)\cos(y)]=\exp[-\sin(x)\cos(y)],\ (x_0,y_0)=(0,0),\ (h,k)=(0.02,0.02)$$
$$f(x,y)=\arctan\left[\sqrt{4+x}-2\exp(y)\right],\ (x_0,y_0)=(4,0),\ (h,k)=(0.03,0.01)$$
$$f(x,y)=\exp[-x\sqrt{y}],\ (x_0,y_0)=(0,4),\ (h,k)=(0.02,0.03).$$

Correction 5 –
La formule de l'approximation affine à l'ordre 1 (DL1) est :

$$f(x_0+h,y_0+k)\simeq f(x_0,y_0)+h\cdot\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)+k\cdot\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0).$$

1. Pour la première approximation on considère $3.16\simeq\pi+0.02$. On considère donc :

   $$f(x,y)=\exp[\sin(\pi+x)\cos(y)]=\exp[-\sin(x)\cos(y)],\quad (x_0,y_0)=(0,0),\quad (h,k)=(0.02,0.02).$$

   On calcule :

   $$\begin{aligned}
   f(x,y)=\exp[\sin(\pi+x)\cdot\cos(y)]=\exp[-\sin(x)\cdot\cos(y)] \quad&\Longrightarrow\quad f(0,0)=1,\\
   \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=-\cos x\cdot\cos y\cdot\exp[-\sin x\cdot\cos y] \quad&\Longrightarrow\quad \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=-1,\\
   \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\sin x\cdot\sin y\cdot\exp[-\sin x\cdot\cos y] \quad&\Longrightarrow\quad \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=0.
   \end{aligned}$$

   L'approximation affine de f au voisinage de $(0,0)$ s'écrit donc

   $$f(h,k)\simeq 1-h.$$

   Avec $h=k=0.02$ on trouve $f(0.02,0.02)\simeq 0.98$.
2. De même avec

   $$f(x,y)=\arctan\left[\sqrt{4+x}-2\exp(y)\right],\quad (x_0,y_0)=(0,0),\quad (h,k)=(0.03,0.01).$$

   $$\begin{aligned}
   \frac{\partial f}{\partial x}&=\frac{1}{2(1+(\sqrt{4+x}-2\exp(y))^2)\sqrt{4+x}}\\
   \frac{\partial f}{\partial y}&=\frac{-2\exp(y)}{1+(\sqrt{4+x}-2\exp(y))^2}
   \end{aligned}$$

   etc. d'où, avec $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=\frac{1}{4}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=-2$,

   $$f(0+h,0+k)=f(0,0)+h\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)+k\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)+\cdots=\tfrac{1}{4}h-2k+\cdots$$

   Avec $h=0.03$ et $k=0.01$ on trouve, pour $\arctan[\sqrt{4.03}-2\exp(0.01)]$, la valeur approchée $0.0075-0.02=-0.0125$.

3. $$f(x,y)=\exp[-x\sqrt{y}],\quad (x_0,y_0)=(0,4),\quad (h,k)=(0.02,0.03)$$

   On trouve :
$$f(0+h,4+k)\simeq 1-2\cdot h+0\cdot k.$$

Exercice 6 – Résistances
Deux résistances R_1 et R_2 sont connectées en parallèle. La résistance totale R du circuit est donnée par la formule
$$\frac{1}{R}=\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}.$$
La résistance R_1 vaut environ 1 ; R_2 vaut environ 2 (en kilo-ohms). Écrire l'approximation linéaire correspondante, puis donner une valeur approchée de R lorsque $R_1=1.2$ et $R_2=1.9$.

Correction 6 –
Posons
$$f(x,y)=\frac{1}{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}}=\frac{xy}{x+y},$$
de sorte que $R=f(R_1,R_2)$. Par exemple, si $R_1=1$ et $R_2=2$, on trouve $R=\frac{2}{3}\simeq 0.666$.
On calcule :
$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\frac{y^2}{(x+y)^2}\quad \text{et}\quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\frac{x^2}{(x+y)^2}.$$
Posons $(x_0,y_0)=(1,2)$. On a
$$f(x_0,y_0)=\frac{2}{3},\quad \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)=\frac{4}{9}\quad \text{et}\quad \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)=\frac{1}{9}.$$
L'approximation linéaire de f au voisinage de (x_0,y_0) s'écrit donc
$$f(1+h,2+k)\simeq\frac{2}{3}+\frac{4}{9}h+\frac{1}{9}k.$$
Avec $h=0.2$ et $k=-0.1$, on trouve $f(1.2,1.9)\simeq 0.744$.

Exercice 7 – Théorème des accroissements finis
Démontrer les résultats suivants énoncés dans le cours.

1. Soit $f:U\to\mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur un ouvert convexe $U\subset\mathbb{R}^2$ muni de la norme euclidienne. On suppose qu'il existe $k>0$ tel que
$$\forall c\in U,\ \|\operatorname{grad} f(c)\|\leqslant k.$$
   Alors
$$\forall a,b\in U,\ |f(b)-f(a)|\leqslant k\|b-a\|.$$
2. Soit $f:U\to\mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur un ouvert convexe $U\subset\mathbb{R}^2$. Si $\operatorname{grad} f(x,y)=(0,0)$ pour tout $(x,y)\in U$, alors f est constante sur U.
3. Trouver toutes les fonctions $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$ telles que
$$\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2,\ \operatorname{grad} f(x,y)=(3x^2+2y,2x-2y).$$

Indications 7 –
1. Appliquer le théorème des accroissements finis en une variable à la fonction $g(t)=f\big((1-t)a+tb\big)$.
2. Appliquer la question précédente.

3. Intégrer d'abord $\frac{\partial f}{\partial x}$. Attention à la « constante » !

Correction 7 – 1. Considérons $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ définie par :

$$g(t) = f\big((1-t)a + tb\big).$$

On a $g(0) = f(a)$ et $g(1) = f(b)$. Comme f est $\mathscr{C}^1$ alors f est continue et dérivable. On peut donc appliquer le théorème des accroissements finis en une variable à la fonction g. Il existe $s \in]0,1[$ tel que :

$$g(1) - g(0) = g'(s)(1-0).$$

On a déjà dit que $g(0) = f(a)$ et $g(1) = f(b)$.
Calculons $g'(t)$ comme la dérivée d'une composition. On peut refaire les calculs sur cet exemple ou bien utiliser la formule plus générale de la dérivée de $g(t) = f\big(x(t), y(t)\big)$:

$$g'(t) = x'(t)\frac{\partial f}{\partial x} + y'(t)\frac{\partial f}{\partial y} = \left\langle \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} \mid \operatorname{grad} f\big(x(t), y(t)\big) \right\rangle$$

Appliqué à notre exemple et en notant $a = (a_1, a_2)$, $b = (b_1, b_2)$:

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = (1-t)a + tb = \begin{pmatrix} (1-t)a_1 + tb_1 \\ (1-t)a_2 + tb_2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a_1 + b_1 \\ -a_2 + b_2 \end{pmatrix} = b - a$$

Ainsi :

$$g'(t) = \langle b - a \mid \operatorname{grad} f((1-t)a + tb) \rangle$$

Donc par l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$|g'(t)| \leqslant \|b-a\| \cdot \|\operatorname{grad} f\| \leqslant k\|b-a\|.$$

Ainsi l'égalité $g(1) - g(0) = g'(s)(1-0)$ implique l'inégalité :

$$|f(b) - f(a)| \leqslant k\|b-a\|.$$

2. Soient a, b deux points de U. Comme U est convexe on a le segment $[a,b]$ contenu dans U. Comme le gradient est partout nul, on peut choisir $k = 0$ comme constante dans la formule de la question précédente, ce qui donne immédiatement :

$$|f(b) - f(a)| \leqslant 0.$$

Et donc $f(a) = f(b)$. Ainsi la valeur de f en deux points quelconque de U est toujours la même, c'est exactement dire que f est une fonction constante.

3. Dans la pratique on intègre par rapport à une variable, puis par rapport à l'autre, en prenant bien soin d'expliquer les constantes d'intégration.
Intégrer d'abord $\frac{\partial f}{\partial x}$. Comme $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 3x^2 + 2y$ alors :

$$f(x,y) = x^3 + 2xy + C(y).$$

C est une constante pour la variable x, mais peut dépendre de la variable y, c'est donc une fonction de y.
Repartant de cette expression, l'équation $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2x - 2y$ devient :

$$2x + C'(y) = 2x - 2y.$$

Donc $C'(y) = -2y$ d'où $C(y) = -y^2 + K$, où $K \in \mathbb{R}$. Conclusion : les solutions cherchées sont de la forme $f(x,y) = x^3 + 2xy - y^2 + K$ et on vérifie qu'elles conviennent, quel que soit $K \in \mathbb{R}$.

Corrections : Arnaud Bodin, Stephan de Bièvre. Relecture : Axel Renard.

EXTREMUMS

1 Dérivées partielles secondes

Exercice 1 – Dérivées partielles secondes
Calculer les dérivées partielles secondes et la matrice hessienne des fonctions f définies par les expressions suivantes :

$$\sin^2(y/x) \qquad \text{et} \qquad \exp(xyz).$$

Indications 1 –
La matrice hessienne est la matrice constituée des dérivées partielles secondes. Utiliser $\sin(2u) = 2\sin u \cos u$ afin de simplifier les calculs.

Correction 1 – 1. $f(x,y) = \sin^2(y/x)$.

Les dérivées partielles sont :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = -\frac{2y}{x^2}\sin(y/x)\cos(y/x) = -\frac{y}{x^2}\sin(2y/x),$$

et

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{2}{x}\sin(y/x)\cos(y/x) = \frac{1}{x}\sin(2y/x).$$

On a utilisé $\sin(2u) = 2\sin u \cos u$.
Désormais on omettra souvent les « (x,y) », c'est-à-dire qu'on écrira $\frac{\partial f}{\partial x}$ à la place de $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$.
On calcule les dérivées partielles secondes :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{2y}{x^3}\sin(2y/x) + \frac{2y^2}{x^4}\cos(2y/x).$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{2}{x^2}\cos(2y/x).$$

On sait que les dérivées croisées sont égales : $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ car f est $\mathscr{C}^2$. Soit on en calcule une seule pour aller plus vite, soit on calcule les deux afin de se rassurer (cela vous garantit quasiment qu'elles sont exactes).

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = -\frac{1}{x^2}\sin(2y/x) - \frac{2y}{x^3}\cos(2y/x).$$

La matrice hessienne est le tableau des dérivées partielles secondes, par le lemme de Schwarz c'est une matrice symétrique :

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) \end{pmatrix}$$

Ici :

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{2y}{x^3}\sin(2y/x) + \frac{2y^2}{x^4}\cos(2y/x) & -\frac{1}{x^2}\sin(2y/x) - \frac{2y}{x^3}\cos(2y/x) \\ -\frac{1}{x^2}\sin(2y/x) - \frac{2y}{x^3}\cos(2y/x) & \frac{2}{x^2}\cos(2y/x) \end{pmatrix}.$$

2. $f(x,y,z) = \exp(xyz)$.

Les dérivées partielles sont :

$$\frac{\partial f}{\partial x} = yze^{xyz}, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = xze^{xyz}, \qquad \frac{\partial f}{\partial z} = xye^{xyz}.$$

On calcule les dérivées partielles d'ordre 2 en se limitant à 6 calculs par le lemme de Schwarz, on en déduit la matrice hessienne (qui est une matrice symétrique) :

$$H_f = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y^2z^2e^{xyz} & z(1+xyz)e^{xyz} & y(1+xyz)e^{xyz} \\ z(1+xyz)e^{xyz} & x^2z^2e^{xyz} & x(1+xyz)e^{xyz} \\ y(1+xyz)e^{xyz} & x(1+xyz)e^{xyz} & x^2y^2e^{xyz} \end{pmatrix}.$$

Exercice 2 – Contre-exemple au théorème de Schwarz

Soit $f(x,y) = \dfrac{xy^3}{x^2+y^2}$ si $(x,y) \neq 0$ et $f(0,0) = 0$.

1. Étudier la continuité de f et de ses dérivées partielles premières sur $\mathbb{R}^2$.
2. Montrer que $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) \neq \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)$.

Correction 2 – 1. Il est facile de vérifier que $f(x,y) \to 0$ en $(0,0)$, par exemple en calculant $f(r\cos\theta, r\sin\theta)$.

On a, pour $(x,y) \neq (0,0)$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{y^5 - x^2y^3}{(x^2+y^2)^2} \longrightarrow 0 = \frac{\partial f}{\partial x}(0,0),$$

et

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{3x^3y^2 + xy^4}{(x^2+y^2)^2} \longrightarrow 0 = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0).$$

Ainsi les dérivées partielles existent et sont continue sur $\mathbb{R}^2$: f est de classe $\mathscr{C}^1$.

2. Calculons $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0)$. Il s'agit de calculer la dérivée partielle $\frac{\partial}{\partial x}$ de la fonction $\frac{\partial f}{\partial y}$: On forme le taux d'accroissement et on calcule la limite :

$$\frac{\frac{\partial f}{\partial y}(0+h,0) - \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)}{h} = \frac{0-0}{h} = 0 \to 0$$

Donc $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = 0$.

Pour $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)$. Il s'agit de calculer la dérivée partielle $\frac{\partial}{\partial y}$ de la fonction $\frac{\partial f}{\partial x}$: On forme le taux d'accroissement et on calcule la limite :

$$\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(0,0+k) - \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)}{k} = \frac{\frac{k^5}{k^4} - 0}{k} = 1 \to 1$$

Donc $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) = 1$.

Ainsi dans ce cas exceptionnel les dérivées croisées ne sont pas égales. L'explication est que la fonction est de classe $\mathscr{C}^1$, mais pas de classe $\mathscr{C}^2$ comme on en aurait besoin dans le lemme de Schwarz.

Noter qu'en dehors de $(0,0)$, f est de classe $\mathscr{C}^2$ (en tant que somme, produit, quotient de fonctions de classe $\mathscr{C}^2$) et donc, pour tout $(x,y) \neq (0,0)$, on a bien :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y).$$

2 Minimums et maximums

Exercice 3 – Étude d'un point critique à l'origine

Pour chacune des fonctions suivantes étudier la nature du point critique donné :

1. $f(x,y) = x^2 - xy + y^2$ au point critique $(0,0)$,
2. $f(x,y) = x^2 + 2xy + y^2 + 6$ au point critique $(0,0)$,

3. $f(x,y) = x^3 + 2xy^2 - y^4 + x^2 + 3xy + y^2 + 10$ au point critique $(0,0)$.

Indications 3 –
Calculer les dérivées partielles secondes au point critique et appliquer le critère de Monge.

Correction 3 – 1. $f(x,y) = x^2 - xy + y^2$ en $(0,0)$.
On a $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x - y$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2y - x$ qui s'annulent simultanément en $(0,0)$.
On calcule les dérivées partielles secondes en (x,y) :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 2 \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = -1 \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 2$$

Ce sont ici des fonctions constantes, on les évalue au point critique :

$$r = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) = 2 \qquad s = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = -1 \qquad t = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0) = 2$$

$$H_f(0,0) = \begin{pmatrix} r & s \\ s & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

D'où $\det H_f(0,0) = rt - s^2 = 3 > 0$ et $r > 0$. Par le critère de Monge, f atteint un minimum local en $(0,0)$.

2. $f(x,y) = x^2 + 2xy + y^2 + 6$ en $(0,0)$.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x + 2y \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2x + 2y$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 2 \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = 2 \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 2$$

$$H_f(0,0) = \begin{pmatrix} r & s \\ s & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Comme $\det H_f(0,0) = rt - s^2 = 0$, le critère de Monge ne permet pas de conclure !
Il faut alors trouver une autre méthode. Ici $f(x,y) = x^2 + 2xy + y^2 + 6 = (x+y)^2 + 6$ donc le point $(0,0)$ présente un minimum local (qui n'est pas strict).

3. $f(x,y) = x^3 + 2xy^2 - y^4 + x^2 + 3xy + y^2 + 10$ en $(0,0)$.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 3x^2 + 2x + 2y^2 + 3y \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 4xy - 4y^3 + 3x + 2y$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 6x + 2 \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = 4y + 3 \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = -12y^2 + 4x + 2$$

$$H_f(0,0) = \begin{pmatrix} r & s \\ s & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

D'où $\det H_f(0,0) = rt - s^2 = -5 < 0$. Par le critère de Monge en $(0,0)$, f est un point-selle. Ce n'est donc ni un minimum local, ni un maximum local.

Exercice 4 – Recherche de minimums et maximums
Trouver les points critiques de la fonction f suivante et déterminer si ce sont des minimums locaux, des maximums locaux ou des points-selles :

$$f(x,y) = \sin x + y^2 - 2y + 1.$$

Indications 4 –
Calculer les dérivées partielles secondes puis utiliser le critère de Monge

Correction 4 –
Puisque

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \cos x \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2y - 2,$$

alors les points critiques sont les points

$$\left((k+\tfrac{1}{2})\pi, 1\right), \qquad k \in \mathbb{Z}.$$

En plus,

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} -\sin x & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Comme $-\sin((k+\frac{1}{2})\pi) = (-1)^{k+1}$, alors

$$H_f\left((k+1/2)\pi, 1\right) = \begin{pmatrix} (-1)^{k+1} & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Autrement dit $r = (-1)^{k+1}$, $s = 0$ et $t = 2$.
Par conséquent,
- si k est impair, $rt - s^2 = 2$ et $r > 0$, donc le point $((k+1/2)\pi, 1)$ est un minimum local,
- si k est pair, $rt - s^2 = -2$ et le point $((k+1/2)\pi, 1)$ est un point-selle.

Exercice 5 – Étude de points critiques
Chercher les extremums des fonctions $f(x,y)$ suivantes :
1. $3xy - x^3 - y^3$
2. $-2(x-y)^2 + x^4 + y^4$
3. $2x + y - x^4 - y^4$
4. $\frac{xy}{(x+y)(1+x)(1+y)}$, $x, y > 0$
5. $x^2y^2(1+3x+2y)$
6. $xe^y + ye^x$
7. $x(\ln^2 x + y^2)$, $x > 0$
8. $\sqrt{x^2+(1-y)^2} + \sqrt{y^2+(1-x)^2}$

Indications 5 –
Trouver les points critiques et appliquer le critère de Monge.

Correction 5 –
On va noter f_x et f_y les dérivées partielles premières, ainsi que f_{xx}, f_{yy} et $f_{xy} = f_{yx}$ les dérivées partielles secondes (toutes les fonctions considérées sont $\mathscr{C}^2$).
1. $f = 3xy - x^3 - y^3$.
   (a)
   $$f_x = 3y - 3x^2 \qquad f_y = 3x - 3y^2$$
   $$f_{xx} = -6x \qquad f_{xy} = 3 \qquad f_{yy} = -6y$$
   (b) Points critiques :
   $$\begin{cases} f_x = 0 \\ f_y = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} y - x^2 = 0 \\ x - y^2 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} y - y^4 = 0 \\ x = y^2 \end{cases} \iff \begin{cases} y(1-y^3) = 0 \\ x = y^2 \end{cases} \iff \begin{cases} y = 0 \text{ ou } y = 1 \\ x = y^2 \end{cases}$$
   On a obtenu l'ordonnée $y = 0$ ou $y = 1$ des points critiques, on obtient l'abscisse par la relation $x = y^2$. Ainsi les points critiques sont $(0,0)$ et $(1,1)$.

(c) Étude en $(0,0)$. On calcule $r = f_{xx}(0,0) = 0$, $s = f_{xy}(0,0) = 3$, $t = f_{yy}(0,0) = 0$. On a $rt - s^2 = -9$ et par le critère de Monge $(0,0)$ est un point-selle (ce n'est donc ni un minimum local, ni un maximum local).

Autrement dit, on est dans le cas où $H_f(0,0) = \begin{pmatrix} r & s \\ s & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$ a un déterminant négatif et donc deux valeurs propres de signe contraire.

(d) Étude en $(1,1)$. On calcule $r = f_{xx}(1,1) = -6$, $s = f_{xy}(1,1) = 3$, $t = f_{yy}(1,1) = -6$. On a $rt - s^2 = 27$ et $r < 0$ donc par le critère de Monge $(0,0)$ est un maximum local.

Autrement dit, on est dans le cas où $H_f(1,1) = \begin{pmatrix} r & s \\ s & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & 3 \\ 3 & -6 \end{pmatrix}$ a deux valeurs propres négatives.

2. $f = -2(x-y)^2 + x^4 + y^4$

(a)

$$f_x = 4(x^3 - x + y) \qquad f_y = 4(y^3 - y + x)$$

$$f_{xx} = 4(3x^2 - 1) \qquad f_{xy} = 4 \qquad f_{yy} = 4(3y^2 - 1)$$

(b) Points critiques :

$$\begin{cases} f_x = 0 \\ f_y = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x^3 - x + y = 0 \\ y^3 - y + x = 0 \end{cases}$$

Si on fait la somme de ces deux équations on obtient $x^3 = -y^3$, donc $x = -y$ (les nombres sont des réels). On substitue $y = -x$ dans la première équation, pour obtenir : $x^3 - 2x = 0$ c'est-à-dire $x(x^2 - 2) = 0$. Ainsi $x = 0$ ou $x = \pm\sqrt{2}$ et $y = -x$. Les trois points critiques sont :

$$(0,0) \qquad (+\sqrt{2}, -\sqrt{2}) \qquad (-\sqrt{2}, +\sqrt{2})$$

(c) Étude en $(0,0)$. $r = -4$, $s = 4$, $t = -4$, $rt - s^2 = 0$ et le critère de Monge ne permet pas de conclure. Cependant sur $\gamma_1(t) = (t,t)$ on a $f(\gamma_1(t)) = 2t^4 \geqslant f(0,0)$ ainsi $(0,0)$ ne peut pas être un maximum local ; mais d'autre part sur $\gamma_2(t) = (t,0)$ on a, lorsque $t \to 0$, $f(\gamma_2(t)) = -2t^2 + t^4 \sim -2t^2 \leqslant f(0,0)$ ainsi $(0,0)$ ne peut pas être un minimum local. Conclusion : $(0,0)$ est un point-selle.

(d) Étude en $\pm(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$. $r = 20$, $s = 4$, $t = 20$, $rt - s^2 = 384 > 0$ et $r > 0$, par le critère de Monge, f admet un minimum local en $(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ et en $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$.

3. $f = 2x + y - x^4 - y^4$

$$f_x = 2 - 4x^3 \qquad f_y = 1 - 4y^3$$

$$f_{xx} = -12x^2 \qquad f_{xy} = 0 \qquad f_{yy} = -12y^2$$

Point critique : $(2^{-1/3}, 4^{-1/3})$, c'est un maximum local par le critère de Monge.

4. $f = \frac{xy}{(x+y)(1+x)(1+y)}$, $x, y > 0$

Des calculs un peu lourds donnent :

$$f_x = \frac{y(y - x^2)}{(x+y)^2(1+x)^2(1+y)} \qquad f_y = \frac{x(x - y^2)}{(x+y)^2(1+x)(1+y)^2}$$

Les points critiques sont les solutions qui vérifient à la fois $y - x^2 = 0$ et $x - y^2 = 0$. Donc $x = x^4$. La seule solution vérifiant $x > 0, y > 0$ est $(1,1)$. En ce point $r = -\frac{1}{16}$, $s = \frac{1}{32}$, $t = -\frac{1}{16}$. Donc $rt - s^2 > 0$ avec $r < 0$. Il s'agit d'un maximum local.

Autre méthode. L'idée est d'utiliser le logarithme pour simplifier le calcul de la dérivée d'un produit. En effet la dérivée de $\ln(uv)$ est simplement $\frac{u'}{u} + \frac{v'}{v}$.

Comme on restreint l'étude au domaine $D = \{(x,y) \mid x > 0,\ y > 0\}$, tous les facteurs qui interviennent dans l'expression de f sont strictement positifs. On peut donc écrire :

$$g(x,y) := \ln(f(x,y)) = \ln(x) + \ln(y) - \ln(x+y) - \ln(1+x) - \ln(1+y).$$

g est de classe $\mathscr{C}^2$ comme composée de deux fonctions de classe $\mathscr{C}^2$. De plus, comme le logarithme est une fonction strictement croissante, les deux fonctions f et g atteignent leurs extremums locaux aux mêmes points de D. Nous allons donc chercher les extremums locaux de g, dont les dérivées partielles sont plus simples à calculer que celles de f.

On a :

$$g_x(x,y) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+y} - \frac{1}{1+x} = \frac{y - x^2}{x(x+y)(1+x)}.$$

En remarquant que $g(x,y) = g(y,x)$, on obtient :

$$g_y(x,y) = g_x(y,x) = \frac{1}{y} - \frac{1}{y+x} - \frac{1}{1+y} = \frac{x - y^2}{y(x+y)(1+y)}.$$

Comme précédemment, on trouve que l'unique point critique est $(1,1)$.

On a ensuite :

$$g_{xx} = \frac{-1}{x^2} + \frac{1}{(x+y)^2} + \frac{1}{(1+x)^2}, \qquad g_{xy} = \frac{1}{(x+y)^2}, \qquad g_{yy} = \frac{-1}{y^2} + \frac{1}{(x+y)^2} + \frac{1}{(1+y)^2},$$

et donc $r = \frac{-1}{2}$, $s = \frac{1}{4}$ et $t = \frac{-1}{2}$. On a alors $rt - s^2 = \frac{1}{4} - \frac{1}{16} = \frac{3}{16} > 0$ et $r < 0$, ce qui implique que g admet un maximum local en $(1,1)$. Par suite, f admet également un maximum local en $(1,1)$.

Remarque. On peut montrer que $f(1,1) = \frac{1}{8}$ est même un maximum global (sur D) en utilisant l'inégalité

$$ab \leqslant \frac{1}{2}(a^2 + b^2), \quad \text{pour tous } a, b \in \mathbb{R}.$$

Pour tout $(x,y) \in D$, on a en effet :

$$\begin{aligned} xy &= (\sqrt{x} \cdot \sqrt{y}) \cdot (1 \cdot \sqrt{x}) \cdot (1 \cdot \sqrt{y}) \\ &\leqslant \frac{1}{2}(x+y) \cdot \frac{1}{2}(1+x) \cdot \frac{1}{2}(1+y) \end{aligned}$$

et donc $f(x,y) \leqslant \frac{1}{8}$.

5. $f = x^2y^2(1 + 3x + 2y)$

(a)

$$f_x = xy^2(9x + 4y + 2) \qquad f_y = 2x^2y(3x + 3y + 1)$$

$$f_{xx} = 2y^2(9x + 2y + 1) \qquad f_{xy} = 2xy(9x + 6y + 2) \qquad f_{yy} = 2x^2(3x + 6y + 1)$$

(b) Points critiques : soit $x = 0$ et alors n'importe quel $(0,y)$ est point critique, soit $y = 0$ et alors n'importe quel $(x,0)$ est point critique. Soit $x \neq 0$ et $y \neq 0$ et alors un point critique vérifie :

$$\begin{cases} 9x + 4y + 2 = 0 \\ 3x + 3y + 1 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = -\frac{2}{15} \\ y = -\frac{1}{5} \end{cases}$$

Les points critiques sont donc les $(x,0)$, les $(0,y)$ et $(-\frac{2}{15}, -\frac{1}{5})$.

(c) Étude en $(-\frac{2}{15}, -\frac{1}{5})$. $r = -\frac{6}{125}$, $s = -\frac{8}{375}$, $t = -\frac{8}{375}$. On a $rt - s^2 > 0$ et $r < 0$ il s'agit donc d'un maximum local.

(d) Étude en $(x,0)$. $r = f_{xx}(x,0) = 0$, $s = f_{xy}(x,0) = 0$, $t = f_{yy}(x,0) = 2x^2(3x+1)$. On a $rt - s^2 = 0$ et le critère de Monge ne permet pas de conclure. On étudie f à la main autour de $(x,0)$. On sait que $x^2y^2 \geqslant 0$, il s'agit donc juste d'étudier $1 + 3x + 2y$ autour de $(x,y) = (x,0)$. Si $x > -\frac{1}{3}$ alors $1 + 3x + 2y > 0$ autour de $(x,0)$ donc $f(x,y) \sim kx^2y^2$ $(k \in \mathbb{R}_+^*)$ et ainsi il s'agit d'un minimum local. De même si $x < -\frac{1}{3}$ il s'agit d'un maximum local. En $(-\frac{1}{3}, 0)$ c'est un point-selle.

(e) Étude en $(0,y)$. De même : maximum local pour $y < -1/2$, minimum local pour $y > -1/2$, point-selle en $y = -1/2$.

6. $f = xe^y + ye^x$

$$f_x = e^y + ye^x \qquad f_y = xe^y + e^x$$

$$f_{xx} = ye^x \qquad f_{xy} = e^x + e^y \qquad f_{yy} = xe^y$$

   Recherche des point critiques : comme la fonction est symétrique (c'est-à-dire $f(x,y) = f(y,x)$) alors un point critique (x_0, y_0) vérifie $y_0 = x_0$. Donc l'équation $f_x(x_0, y_0) = 0$ devient $e^{x_0} + x_0 e^{x_0} = 0$ d'où $x_0 = -1$ et donc $y_0 = -1$. Bilan : un seul point critique $(-1,-1)$.
   En ce point, $r = -1/e$, $s = +2/e$, $t = -1/e$. Donc $rt - s^2 < 0$, il s'agit d'un point-selle.

7. $f = x(\ln^2 x + y^2)$, $x > 0$

$$f_x = \ln^2 x + 2\ln x + y^2 \qquad f_y = 2xy$$

$$f_{xx} = 2\frac{\ln x + 1}{x} \qquad f_{xy} = 2y \qquad f_{yy} = 2x$$

   Recherche du point critique. Par hypothèse $x > 0$, donc $y = 0$ et par suite $\ln^2 x + 2\ln x = 0$, d'où $\ln x(\ln x + 2) = 0$. Ainsi $x = 1$ ou $x = e^{-2}$. Les points critiques sont $(1,0)$ et $(e^{-2},0)$.
   Le critère de Monge s'applique et indique que $(1,0)$ est un minimum local alors que $(e^{-2},0)$ est un point-selle.

8. $f = \sqrt{x^2 + (1-y)^2} + \sqrt{y^2 + (1-x)^2}$
   Le plus simple est d'interpréter géométriquement la fonction f comme la somme des distances entre un point $M(x,y)$ et deux points $A(0,1)$ et $B(1,0)$ du plan. Cette somme est minimale (et vaut la longueur AB) si et seulement si M appartient au segment $[A,B]$: donc $x \in [0,1]$ et $y = 1 - x$.

Exercice 6 – Point non extrémal
On pose pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2$:

$$f(x,y) = x^2 + y^2 - 2x^2 y - \frac{4x^6y^2}{(x^4+y^2)^2} \quad \text{si } (x,y) \neq 0, \qquad f(0,0) = 0.$$

1. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^2$.
2. Soit $\theta \in \mathbb{R}$ fixé et $g_\theta(r) = f(r\cos\theta, r\sin\theta)$. Montrer que g_θ admet un minimum local strict en $r = 0$.
3. Calculer $f(x,x^2)$. Conclusion ?

Indications 6 –
$2x^4y^2 \leqslant (x^4+y^2)^2$.

Correction 6 – 1. f est continue en dehors de l'origine ; f est aussi continue en $(0,0)$: tout d'abord $2x^4y^2 \leqslant (x^4+y^2)^2$ car $(x^4+y^2)^2 = x^8 + y^4 + 2x^4y^2 \geqslant 2x^4y^2$. Ainsi :

$$0 \leqslant \frac{4x^6y^2}{(x^4+y^2)^2} = 2x^2\frac{2x^4y^2}{(x^4+y^2)^2} \leqslant 2x^2 \to f(0,0) = 0.$$

2.
$$g_\theta(r) = f(r\cos\theta, r\sin\theta) = r^2 - r^3 c_{1,\theta} + r^4 c_{2,\theta}(r) = r^2 + o(r^2).$$

   Donc le long d'un rayon d'angle θ fixé, $g_\theta(r) \sim r^2$. Ainsi le long de ce rayon, g_θ admet un minimum local à l'origine, autrement dit sur chaque rayon les valeurs de f sont supérieures à $f(0,0)$.

3. $f(x,x^2) = -x^4$. Donc $(0,0)$ n'est pas minimum local de f car on trouve aussi des valeurs inférieures à $f(0,0)$.

3 Applications

Exercice 7 – Ajustement linéaire
Étant donnés n couples de réels (x_i, y_i) avec $1 \leqslant i \leqslant n$, on cherche une droite D d'équation $y = ax + b$ telle que $E(a,b) = \sum_{i=1}^n (y_i - ax_i - b)^2$ soit minimal.
On note

$$\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_i, \qquad \overline{y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n y_i, \qquad \overline{x^2} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_i^2, \qquad \overline{xy} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_i y_i,$$

et on suppose $\overline{x^2} \neq \overline{x}^2$.

1. Résoudre le problème.
2. Interpréter la relation $\overline{x^2} \neq \overline{x}^2$ à l'aide de l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

Indications 7 –
Si la fonction E atteint un minimum alors en ce ce minimum les deux dérivées partielles par rapport à a et à b s'annulent. Les variables sont bien a et b ; les x_i, y_i sont des constantes.

Correction 7 –

1. Comme $E(a,b) = \sum_{i=1}^n (y_i - ax_i - b)^2$ alors :

$$\frac{\partial E}{\partial a}(a,b) = \sum_{i=1}^n -2x_i(y_i - ax_i - b) = -2n\overline{xy} + 2na\overline{x^2} + 2nb\overline{x}.$$

Et

$$\frac{\partial E}{\partial b}(a,b) = \sum_{i=1}^n -2(y_i - ax_i - b) = -2n\overline{y} + 2na\overline{x} + 2nb.$$

La fonction E est une somme de carrés, elle admet donc (au moins) un minimum global. Ce minimum global est nécessairement un point critique. Calculons-le ! En un point critique les deux dérivées partielles s'annulent simultanément, donc

$$\frac{\partial E}{\partial a}(a,b) = 0 \iff -\overline{xy} + a\overline{x^2} + b\overline{x} = 0 \qquad (E_a)$$

$$\frac{\partial E}{\partial b}(a,b) = 0 \iff -\overline{y} + a\overline{x} + b = 0 \qquad (E_b)$$

On calcule $(E_a) - \overline{x}(E_b)$ pour obtenir :

$$-\overline{xy} + \overline{x}\cdot\overline{y} + a\left(\overline{x^2} - \overline{x}^2\right) = 0.$$

D'où :

$$a = \frac{\overline{xy} - \overline{x}\cdot\overline{y}}{\overline{x^2} - \overline{x}^2} = \frac{\text{Covariance}(x,y)}{\text{Variance}(x)}.$$

Puis par (E_b) on en déduit :

$$b = \overline{y} - a\overline{x}.$$

On a trouvé un seul point critique possible, c'est donc nécessairement le minimum global.

2. On applique Cauchy-Schwarz avec $X = (x_1, \ldots, x_n)$ et $Y = (1, \ldots, 1)$. Alors $\langle X \mid Y \rangle \leqslant \|X\| \cdot \|Y\|$, donne $\left(\sum x_i\right)^2 \leqslant \left(\sum x_i^2\right) \times n$ donc $\overline{x}^2 \leqslant \overline{x^2}$ (i.e. la variance est toujours positive ou nulle). Le cas d'égalité de Cauchy-Schwarz, nous dit donc que $\overline{x}^2 = \overline{x^2}$, ssi $X = \lambda Y$ $(\lambda \in \mathbb{R})$, c'est-à-dire toutes les coordonnées de X sont identiques, i.e. ssi $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$.

Exercice 8 – L'équation des ondes

L'équation des ondes est l'équation aux dérivées partielles :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 0. \tag{1}$$

Il s'agit de trouver la solution générale $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x,t) \mapsto f(x,t)$ (de classe $\mathscr{C}^2$) de cette équation.

1. Grâce au changement de variables
$$\Phi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2,\ (u,v) \longmapsto (x,t) = \left(\frac{u-v}{2}, \frac{u+v}{2}\right),$$
la fonction f se transforme en $F(u,v) = f \circ \Phi(u,v) = f(\frac{u-v}{2}, \frac{u+v}{2})$. Montrer que pour que f soit solution de (1) il faut et il suffit que
$$\frac{\partial^2 F}{\partial u \partial v} = 0. \tag{2}$$
2. Montrer que, si F satisfait à (2), il existe deux fonctions $g_1, g_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que
$$F(u,v) = g_1(u) + g_2(v).$$
3. Écrire la solution générale de (1) et expliquer la phrase : "En une dimension d'espace, toute solution de l'équation des ondes s'écrit comme somme d'une onde qui se déplace vers la droite et une qui se déplace vers la gauche."
4. Trouver la solution unique de l'équation des ondes qui satisfait aux conditions initiales
$$f(x,0) = \sin x, \qquad \frac{\partial f}{\partial t}(x,0) = -\cos x. \tag{3}$$

Correction 8 – 1. $F = f \circ \Phi$, on applique la formule « $J_F = J_f \times J_\Phi$ » où :

$$J_F = \begin{pmatrix} \frac{\partial F}{\partial u} & \frac{\partial F}{\partial v} \end{pmatrix} \qquad J_f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial t} \end{pmatrix} \qquad J_\Phi(u,v) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Par la formule « $J_F = J_f \times J_\Phi$ » nous obtenons :

$$\frac{\partial F}{\partial u} = \frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial t}$$
$$\frac{\partial F}{\partial v} = -\frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial t}$$

Autrement dit, nous obtenons les identités d'opérateurs :

$$\frac{\partial}{\partial u} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial t}\right)$$
$$\frac{\partial}{\partial v} = \frac{1}{2}\left(-\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial t}\right)$$

Nous avons appliqué ces identités à la fonction f, mais on peut aussi les appliquer à $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial x}$ afin de calculer $\frac{\partial^2 F}{\partial u \partial v}$:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 F}{\partial u \partial v} &= \frac{\partial}{\partial u}\frac{\partial F}{\partial v} \\
&= \frac{\partial}{\partial u}\left(-\frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial t}\right) \\
&= -\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial u}\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial u}\frac{\partial f}{\partial t} \\
&= -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial f}{\partial x}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial f}{\partial t}\right) \\
&= -\frac{1}{4}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{1}{4}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}
\end{aligned}$$

(On a utilisé f de classe $\mathscr{C}^2$, pour simplifier les dérivées croisées.) D'où pour que f satisfasse l'équation (1) il faut et il suffit que F satisfasse l'équation (2).

2. Supposons que F satisfasse l'équation (2). Alors la fonction $\frac{\partial F}{\partial u}$ est une fonction, disons h_1, dépendant seulement de la variable u et la fonction $\frac{\partial F}{\partial v}$ est une fonction, disons h_2, dépendant seulement de la variable v. Par conséquent, $F(u,v) = g_1(u) + g_2(v)$ où $g_1' = h_1$ et $g_2' = h_2$.
3. On remarque que $u = x + t$ et $v = t - x$. La solution générale de (1) s'écrit alors
$$f(x,t) = g_1(u) + g_2(v) = g_1(x+t) + g_2(t-x).$$
En considérant x comme la variable de position et t la variable de temps, la fonction g_1 décrit une onde qui se déplace vers la droite et la fonction g_2 décrit une onde qui se déplace vers la gauche.
4. Enfin, pour trouver la solution unique satisfaisant aux conditions initiales (3) nous constatons que les conditions initiales entraînent les égalités :
$$\begin{aligned} f(x,0) &= g_1(x) + g_2(-x) = \sin x \\ \frac{\partial f}{\partial x}(x,0) &= g_1'(x) - g_2'(-x) = \cos x \\ \frac{\partial f}{\partial t}(x,0) &= g_1'(x) + g_2'(-x) = -\cos x \end{aligned}$$
d'où $g_1'(x) = 0$ et $g_2'(-x) = -\cos x$, c'est-à-dire $g_2(x) = \sin(-x)$. Par conséquent, la solution unique cherchée f s'écrit
$$f(x,t) = \sin(x-t).$$

4 Laplacien & co

Exercice 9 – Laplacien, gradient, divergence, rotationnel
Le *laplacien* de $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est :
$$\Delta f(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(x).$$

1. Montrer $\Delta f(x) = \operatorname{div}(\operatorname{grad} f(x))$.
Cela justifie l'écriture $\Delta f(x) = \nabla \cdot \nabla f(x) = \nabla^2 f(x)$.
2. Montrer $\operatorname{div}(\operatorname{rot} F(x)) = 0$ pour $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dont les composantes sont de classe $\mathscr{C}^2$.
3. Montrer $\operatorname{rot}(\operatorname{grad} f(x)) = (0,0,0)$ pour $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^2$.

Indications 9 –
$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$:
$$\operatorname{grad} f(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(x) \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n}(x) \end{pmatrix}.$$
$F = (f_1, \dots, f_n) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$
$$\operatorname{div} F(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial x_i}(x).$$
$F = (f_1, f_2, f_3) : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$
$$\operatorname{rot} F(x,y,z) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_3}{\partial y}(x,y,z) - \dfrac{\partial f_2}{\partial z}(x,y,z) \\ \dfrac{\partial f_1}{\partial z}(x,y,z) - \dfrac{\partial f_3}{\partial x}(x,y,z) \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x}(x,y,z) - \dfrac{\partial f_1}{\partial y}(x,y,z) \end{pmatrix}.$$

Correction 9 – 1. On rappelle que pour $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$:

$$\operatorname{grad} f(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(x) \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n}(x) \end{pmatrix}.$$

Et pour $F = (f_1, \dots, f_n) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$:

$$\operatorname{div} F(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial x_i}(x).$$

Donc la divergence du gradient est :

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(\operatorname{grad} f(x)) &= \operatorname{div} \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(x) \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n}(x) \end{pmatrix} \\ &= \frac{\partial}{\partial x_1}\frac{\partial f}{\partial x_1}(x) + \cdots + \frac{\partial}{\partial x_n}\frac{\partial f}{\partial x_n}(x) \\ &= \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(x) + \cdots + \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}(x) \\ &= \Delta f(x). \end{aligned}$$

2. Soit $F = (f_1, f_2, f_3) : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$. On rappelle que :

$$\operatorname{rot} F(x,y,z) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_3}{\partial y}(x,y,z) - \frac{\partial f_2}{\partial z}(x,y,z) \\ \frac{\partial f_1}{\partial z}(x,y,z) - \frac{\partial f_3}{\partial x}(x,y,z) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x}(x,y,z) - \frac{\partial f_1}{\partial y}(x,y,z) \end{pmatrix}.$$

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(\operatorname{rot} F(x)) &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f_3}{\partial y} - \frac{\partial f_2}{\partial z}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f_1}{\partial z} - \frac{\partial f_3}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y}\right) \\ &= \frac{\partial^2 f_3}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 f_2}{\partial x \partial z} \quad + \quad \frac{\partial^2 f_1}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 f_3}{\partial y \partial x} \quad + \quad \frac{\partial^2 f_2}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 f_1}{\partial z \partial y} \\ &= 0. \end{aligned}$$

On a utilisé que les dérivées croisées sont égales car chaque f_i est de classe $\mathscr{C}^2$.

3. Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^2$.

$$\operatorname{rot}(\operatorname{grad} f(x)) = \operatorname{rot} \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice 10 – Laplacien en dimension n

Soit f une application de classe $\mathscr{C}^2$ de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$. On définit une application F de $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ dans $\mathbb{R}$ par : $F(x_1, \dots, x_n) = f\left(\sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}\right)$. Calculer le laplacien de F en fonction de f.

Indications 10 –

Dériver la composition $F = f \circ r$ par rapport à x_i. Puis dériver $\frac{\partial F}{\partial x_i}$ une seconde fois. Il faut trouver : $\Delta F = \frac{n-1}{r} f'(r) + f''(r)$.

Correction 10 – 1. On note $r = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}$ à la fois comme un nombre réel et une fonction $r : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. On a donc $F = f \circ r$.

On va appliquer la formule « $J_F = J_f \times J_r$ », sachant que

$$J_F = \begin{pmatrix} \frac{\partial F}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial F}{\partial x_n} \end{pmatrix} \qquad J_f = f'(r) \qquad J_r = \begin{pmatrix} \frac{\partial r}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial r}{\partial x_n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{x_1}{r} & \dots & \frac{x_n}{r} \end{pmatrix}$$

Ainsi :

$$\frac{\partial F}{\partial x_i} = \frac{x_i}{r} \cdot f'(r).$$

Autrement dit, on a une identité d'opérateurs :

$$\frac{\partial}{\partial x_i} = \frac{x_i}{r} \cdot \frac{d}{dr}.$$

2. Dérivons $G = f'(r) = f' \circ r$ par rapport à x_i, en appliquant la même formule obtenue (avec f' à la place de f) :

$$\frac{\partial f'(r)}{\partial x_i} = \frac{x_i}{r} \cdot f''(r).$$

3. On peut maintenant dériver $\frac{\partial F}{\partial x_i} = \frac{x_i}{r} \cdot f'(r)$ par rapport à x_i :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 F}{\partial x_i^2} &= \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial F}{\partial x_i} \\
&= \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{x_i}{r} \cdot f'(r) \right) \\
&= \frac{\partial \frac{x_i}{r}}{\partial x_i} \cdot f'(r) + \frac{x_i}{r} \cdot \frac{\partial f'(r)}{\partial x_i} \\
&= \frac{r - \frac{x_i^2}{r}}{r^2} \cdot f'(r) + \frac{x_i^2}{r^2} \cdot f''(r) \\
&= \frac{r^2 - x_i^2}{r^3} \cdot f'(r) + \frac{x_i^2}{r^2} \cdot f''(r)
\end{aligned}$$

4. On somme les équations précédentes :

$$\begin{aligned}
\Delta F &= \frac{\partial^2 F}{\partial x_1^2} + \cdots + \frac{\partial^2 F}{\partial x_n^2} \\
&= \frac{nr^2 - (x_1^2 + \cdots + x_n^2)}{r^3} \cdot f'(r) + \frac{x_1^2 + \cdots + x_n^2}{r^2} \cdot f''(r) \\
&= \frac{nr^2 - r^2}{r^3} \cdot f'(r) + \frac{r^2}{r^2} \cdot f''(r) \\
&= \frac{n-1}{r} \cdot f'(r) + f''(r).
\end{aligned}$$

Conclusion :

$$\Delta F = \frac{n-1}{r} f'(r) + f''(r).$$

Exercice 11 – Laplacien en coordonnées polaires

Soit $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^2$ et soient r et θ les coordonnées polaires standard dans le plan de telle sorte que l'association

$$\Phi :]0, +\infty[\times [0, 2\pi[\longrightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}, \quad (r, \theta) \longmapsto (x, y) = (r\cos\theta, r\sin\theta),$$

soit un changement de variables. Soit F la fonction définie par

$$F(r,\theta) = f(r\cos\theta, r\sin\theta).$$

C'est « l'expression de f en coordonnées polaires ». Le but de l'exercice est de prouver :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = \frac{\partial^2 F}{\partial r^2}(r,\theta) + \frac{1}{r}\frac{\partial F}{\partial r}(r,\theta) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 F}{\partial \theta^2}(r,\theta).$$

Cette formule s'appelle l'expression du « laplacien en coordonnées polaires ».

1. Calculer les dérivées partielles de F par rapport à r et θ en fonction des dérivées partielles de f par rapport à x et y et obtenir les identités d'opérateurs :
$$\frac{\partial}{\partial r} = \frac{x}{r}\cdot\frac{\partial}{\partial x} + \frac{y}{r}\cdot\frac{\partial}{\partial y} \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial}{\partial \theta} = -y\cdot\frac{\partial}{\partial x} + x\cdot\frac{\partial}{\partial y}.$$
2. Calculer $\frac{\partial^2 F}{\partial r^2}$ en dérivant $\frac{\partial F}{\partial r}$ par rapport à r et en utilisant que x/r et y/r ne dépendent pas de r.
3. Calculer $\frac{\partial^2 F}{\partial \theta^2}$ en dérivant $\frac{\partial F}{\partial \theta}$ par rapport à θ et en montrant que $\frac{\partial x}{\partial \theta} = -y$ et $\frac{\partial y}{\partial \theta} = x$.
4. Conclure.

Indications 11 –
L'exercice ne dépend pas de la connaissance du Laplacien.

1. On a $F = f \circ \Phi$, puis appliquer la formule « $J_F = J_f \times J_\Phi$ ».
2. Il s'agir d'appliquer $\frac{\partial}{\partial r}$ à $\frac{\partial F}{\partial r} = \frac{x}{r}\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{y}{r}\frac{\partial f}{\partial y}$.
3. Il s'agir d'appliquer $\frac{\partial}{\partial \theta}$ à $\frac{\partial F}{\partial \theta} = -y\frac{\partial f}{\partial x} + x\frac{\partial f}{\partial y}$.

Correction 11 –

1. On a $F = f \circ \Phi$.
$$J_F = \begin{pmatrix} \frac{\partial F}{\partial r} & \frac{\partial F}{\partial \theta} \end{pmatrix} \qquad J_f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix} \qquad J_\Phi = \begin{pmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix}.$$
Par la formule « $J_F = J_f \times J_\Phi$ », on obtient :
$$\frac{\partial F}{\partial r} = \cos\theta\cdot\frac{\partial f}{\partial x} + \sin\theta\cdot\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{x}{r}\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{y}{r}\frac{\partial f}{\partial y}.$$
Ainsi on passe de l'opérateur $\frac{\partial}{\partial r}$ aux opérateurs $\frac{\partial}{\partial x}$, $\frac{\partial}{\partial y}$ par l'identité :
$$\frac{\partial}{\partial r} = \frac{x}{r}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{y}{r}\frac{\partial}{\partial y}$$
Et on obtient aussi :
$$\frac{\partial F}{\partial \theta} = -r\sin\theta\frac{\partial f}{\partial x} + r\cos\theta\frac{\partial f}{\partial y} = -y\frac{\partial f}{\partial x} + x\frac{\partial f}{\partial y},$$
d'où :
$$\frac{\partial}{\partial \theta} = -y\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial y}.$$

2. Pour calculer $\frac{\partial^2 F}{\partial r^2}$, on part de $\frac{\partial F}{\partial r} = \frac{x}{r} f_x + \frac{y}{r} f_y$, et on dérive cette expression de nouveau par rapport à r.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 F}{\partial r^2} &= \frac{\partial}{\partial r}\frac{\partial F}{\partial r} \\
&= \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{x}{r} f_x + \frac{y}{r} f_y\right) \\
&= \frac{x}{r}\frac{\partial f_x}{\partial r} + \frac{y}{r}\frac{\partial f_y}{\partial r} \qquad \text{car } \frac{x}{r} = \cos\theta \text{ et } \frac{y}{r} = \sin\theta \text{ ne dépendent pas de } r \\
&= \frac{x}{r}\left(\frac{x}{r}\frac{\partial f_x}{\partial x} + \frac{y}{r}\frac{\partial f_x}{\partial y}\right) + \frac{y}{r}\left(\frac{x}{r}\frac{\partial f_y}{\partial x} + \frac{y}{r}\frac{\partial f_y}{\partial y}\right) \\
&= \frac{1}{r^2}\left(x^2 f_{xx} + 2xy f_{xy} + y^2 f_{yy}\right)
\end{aligned}$$

3. Commençons par remarquer que :

$$\frac{\partial x}{\partial \theta} = \frac{\partial r\cos\theta}{\partial \theta} = -r\sin\theta = -y$$

et

$$\frac{\partial y}{\partial \theta} = \frac{\partial r\sin\theta}{\partial \theta} = r\cos\theta = x.$$

Pour calculer $\frac{\partial^2 F}{\partial \theta^2}$, on part de $\frac{\partial F}{\partial \theta} = -y f_x + x f_y$, et on dérive cette expression par rapport à θ.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 F}{\partial \theta^2} &= \frac{\partial}{\partial \theta}\frac{\partial F}{\partial \theta} \\
&= \frac{\partial}{\partial \theta}\left(-y f_x + x f_y\right) \\
&= \left(-\frac{\partial y}{\partial \theta} f_x - y\frac{\partial f_x}{\partial \theta}\right) + \left(\frac{\partial x}{\partial \theta} f_y + x\frac{\partial f_y}{\partial \theta}\right) \\
&= \left(-x f_x - y\left(-y\frac{\partial f_x}{\partial x} + x\frac{\partial f_x}{\partial y}\right)\right) + \left(-y f_y + x\left(-y\frac{\partial f_y}{\partial x} + x\frac{\partial f_y}{\partial y}\right)\right) \\
&= -x f_x - y f_y + x^2 f_{yy} - 2xy f_{xy} + y^2 f_{xx}
\end{aligned}$$

4. Il s'agit de faire une somme à partir des trois égalités obtenues :

$$\begin{aligned}
r\frac{\partial F}{\partial r} + r^2\frac{\partial^2 F}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial \theta^2} & \\
&= x f_x + y f_y \\
&\quad + x^2 f_{xx} + 2xy f_{xy} + y^2 f_{yy} \\
&\quad\quad - x f_x - y f_y + x^2 f_{yy} - 2xy f_{xy} + y^2 f_{xx} \\
&= (x^2 + y^2)(f_{xx} + f_{yy}) \\
&= r^2(f_{xx} + f_{yy})
\end{aligned}$$

D'où l'égalité recherchée.

Corrections : Arnaud Bodin, Stephan de Bièvre. Relecture : Axel Renard.